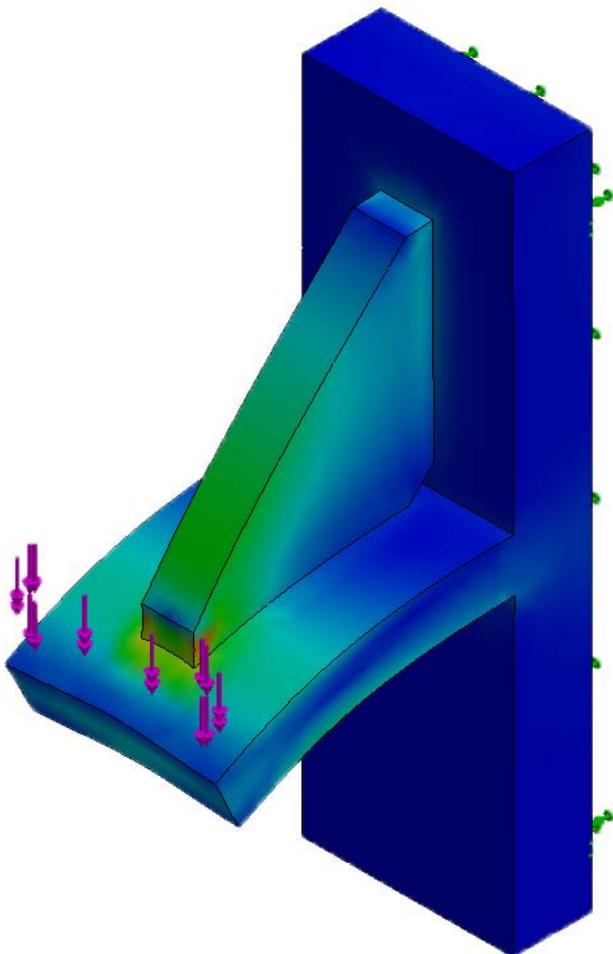


2015/16

Selbstlernkurs zur Anwendung der FEM mit SolidWorks



BK Platz der Republik, Mönchengladbach
Fachschule Maschinenbautechnik

© StD Bernhard Fleischer

Stand: 28.02.16

Das Werk darf nur und ausschließlich für
unterrichtliche Zwecke eingesetzt werden

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	4
1.1	Geschichte und Anwendung	5
1.2	Arbeitsweise der FEM	5
2	Einführung in die FEM.....	10
2.1	Handrechnung.....	10
2.2	Start der FEM-Analyse.....	11
2.3	Freischalten der SolidWorks Simulation	11
2.4	Öffnen einer neuen Studie.....	12
2.5	Vernetzung.....	16
3	Grundlagen der Vernetzung	22
3.1	Spannungssingularitäten als Fehler in der FEM-Analyse	23
3.2	Vernetzung mit Schalenelementen.....	33
3.3	Gegenüberstellung der Vernetzungsvarianten.....	38
4	Grundbeanspruchungsarten	40
4.1	Vollwelle auf Biegespannung	41
4.2	Hohlwelle auf Biegespannung.....	44
4.3	I-Träger auf Biegespannung	46
4.4	Vollwelle auf Torsionsspannung	49
4.5	Hohlwelle auf Torsionsspannung.....	52
4.6	I-Trägers auf Torsionsspannung.....	54
4.7	Abschlussbetrachtung.....	56

5	Kerbwirkung	59
5.1	Begriff Kerbwirkung	59
5.2	Untersuchungsgegenstände	60
5.3	Handrechnungen.....	61
5.4	FEM-Analysen.....	63
5.5	Abschließende Betrachtung	66
6	Angeformte Bauweise	68
6.1	Vorhandene Spannung in der Ausgangsbetrachtung	69
6.2	Geometrieanpassung an den Biegespannungsverlauf	71
6.3	Optimierung der Geometrie	74
6.4	Weitere Ansätze zur Optimierung	80
	Quellenverzeichnis.....	85

1 Vorwort

Dieser Kurs zur Anwendung der FEM-Analyse soll dem Studierenden anhand diverser Beispiele zeigen, wie die SolidWorks-Simulation gewinnbringend im Berechnungs- und Produktentwicklungsprozess eingesetzt werden kann. Die Beispiele sind bewusst so gestaltet, dass jede FEM-Analyse mittels einer vorangestellten Handrechnung überprüft werden kann um entsprechende Vergleiche ziehen zu können. In diesem Zusammenhang erfolgen Vergleiche von Profilen unter Biege- und Torsionsbelastung. Im Weiteren werden die grundsätzlichen Auswirkungen von Kerben untersucht und entsprechende konstruktive Strategien abgeleitet. Abschluss finden die Betrachtungen mit einem Ausblick zur angeformten Bauweise als Wegweiser in die Philosophie des Leichtbaus und ein Ausblick auf gestaltoptimierende Simulationswerkzeuge der Industrie.

Im Besonderen soll auch für potenzielle Fehlerquellen sensibilisiert werden – dies gilt vor allem bei Unkenntnis der grundsätzlichen Unzulänglichkeiten der FEM oder bei individuellen fachlichen Mängeln. **Merke: Das Programm rechnet immer richtig! Falsch sind immer nur die vom Anwender getroffenen Annahmen und Randbedingungen oder Interpretation der Ergebnisse.** Eine FEM kann immer nur sinnvolle Ergänzung sein; mangelnde eigene Kenntnisse kann sie jedoch nie ersetzen!

Das vorliegende Skript ist als Selbstlernkurs konzipiert. Anfänglich sehr detaillierte Hilfestellungen mittels zahlreicher Screenshots werden im Kursfortgang zunehmend reduziert und vom Lerner als selbständig vorausgesetzt. Alle simulierten Bauteile stehen als elektronische Dateien in einem Vorlagenordner zur Verfügung. Entstanden ist der Kurs aus der Unterrichtsarbeit der Fachschule Maschinenbautechnik am Berufskolleg Platz der Republik in Mönchengladbach. Für konstruktive Hinweise zur Verbesserung dieses Leitfadens oder Fehlerkorrekturen sind Hinweise gerne gewünscht unter: fleischer@bk-tm.de.

1.1 Geschichte und Anwendung der FEM

Ursprünglich wurde die Finite-Elemente-Methode zur Lösung von Festkörper-Problemen im Rahmen der Spannungs- und Verformungsanalyse entwickelt. Mittlerweile findet die Methode in allen Gebieten der Technik einschließlich Wettervorhersage und Medizintechnik ihre Anwendung. Im Rahmen des Fahrzeugbaus findet sie beispielsweise Einsatz bei Festigkeitsuntersuchungen von Kleinteilen über komplette Karosserien einschließlich Crash-Verhalten, Lärm- und Schwingungsausbreitung.

Der Einsatz der FEM in der Praxis begann in den 1950er Jahren bei einer Strukturberechnung von Flugzeugflügeln in der Luft- und Raumfahrtindustrie und zog sehr bald auch im Fahrzeugbau unterstützend ein. Grundlagen der Methode basieren auf Arbeiten bei der Daimler AG in Stuttgart, die das selbst entwickelte FEM-Programm ESEM (Elektrostatik-Element-Methode) einsetzte, lange bevor die computerunterstützte Konstruktion (CAD) Anfang der 1980er Jahre ihren Einzug hielt. Der Ausdruck Finite-Elemente-Methode wurde erstmals 1960 vorgeschlagen und wird seit den 1970er Jahren überall verwendet.

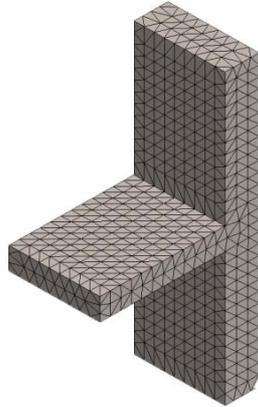
1.2 Arbeitsweise der FEM (Finite-Elemente-Methode)

Die FE-Methode (oder FE-Analyse genannt) hat zum Ziel, ein zu entwickelndes Bauteil als 3D-Modell virtuell äußeren Belastungen auszusetzen. So können Schwachstellen ermittelt und konstruktive Maßnahmen zur Verbesserung vorgenommen werden. Der Bedarfslage entsprechend lassen sich die gewünschten Ergebnisse darstellen. In diesem Selbstlernkurs werden die Betrachtungen auf die Spannungsanalyse unter statischen Bedingungen beschränkt. Auch gelten weitere idealisierte Annahmen wie ein isotropisches Werkstoffverhalten, Einsatz unter Raumtemperatur etc.

Der Verlauf einer FEM-Analyse lässt sich gut anhand dreier Phasen beschreiben:

Phase1

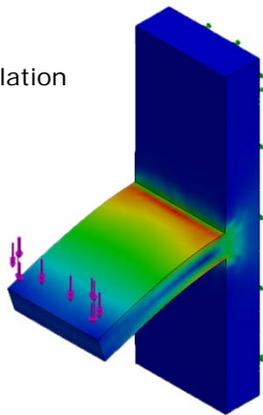
Vernetzung



Basierend auf dem konstruktiven Anforderungsprofil eines geplanten Bauteiles wird ein 3D-Modell entwickelt. Zu Beginn der FEM wird auf dem Bauteil ein Elementnetz generiert. Dadurch wird das Modell in kleine Einheiten gegliedert.

Phase2

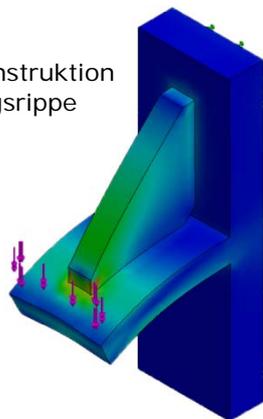
Spannungssimulation



Dann wird das Modell mit äußeren Belastungen beaufschlagt (Kräfte, Torsionsmoment etc.). Über eine aufwändige mathematische Berechnung werden Spannungen und Verformungen am Netzverlauf errechnet und farblich abgestuft angezeigt.

Phase3

Verbesserte Konstruktion mit Verstärkungsrippe



Auf der Basis der gewonnenen Erkenntnisse wird das Bauteil optimiert: stark beanspruchte Bereiche werden ggf. verstärkt oder/und der Kraftfluss durch Gestaltveränderung im 3D-Modell insgesamt verbessert. Weitere Analysen ergeben Aufschluss über die Auswirkungen der Veränderungen.

Abb. 1 Phasen der FEM

Die im Ergebnis farbig gekennzeichneten Bereiche geben Auskunft über den Spannungszustand und –verlauf innerhalb des Bauteils (innere Spannungen). Hier lassen sich dann Bereiche identifizieren, die als gefährdet angesehen werden müssen (Überschreitung der Streckgrenze) und als Folge ggf. verstärkt oder andersartig konstruktiv umgesetzt werden. Aber auch Bereiche mit Potenzial für Materialeinsparung lassen sich gut identifizieren. Durch geschicktes Abstimmen beider Aspekte lassen sich Bauteile realisieren, die das Optimum an Festigkeit mit einem Minimum an Materialeinsatz verbinden (Prinzip der konstanten Spannung).

Abbildung 3 zeigt ein praktisches Beispiel für die Optimierung der Verformung. Es handelt sich um einen druckbeaufschlagten Deckel einer Anlage zur Wasseraufbereitung. Auf Grund unzulässig hoher Durchbiegungen kam es zu unakzeptablen Undichtigkeiten. Mehrere Änderungen in den Geometrien wurden hinsichtlich der sich ergebenden Verschiebungen mit der FEM überprüft (Abbildung 2). Erfolgversprechende Ansätze wurden entsprechend weiter verfolgt und der Deckel in diesem Zuge in seiner Formgebung optimiert.

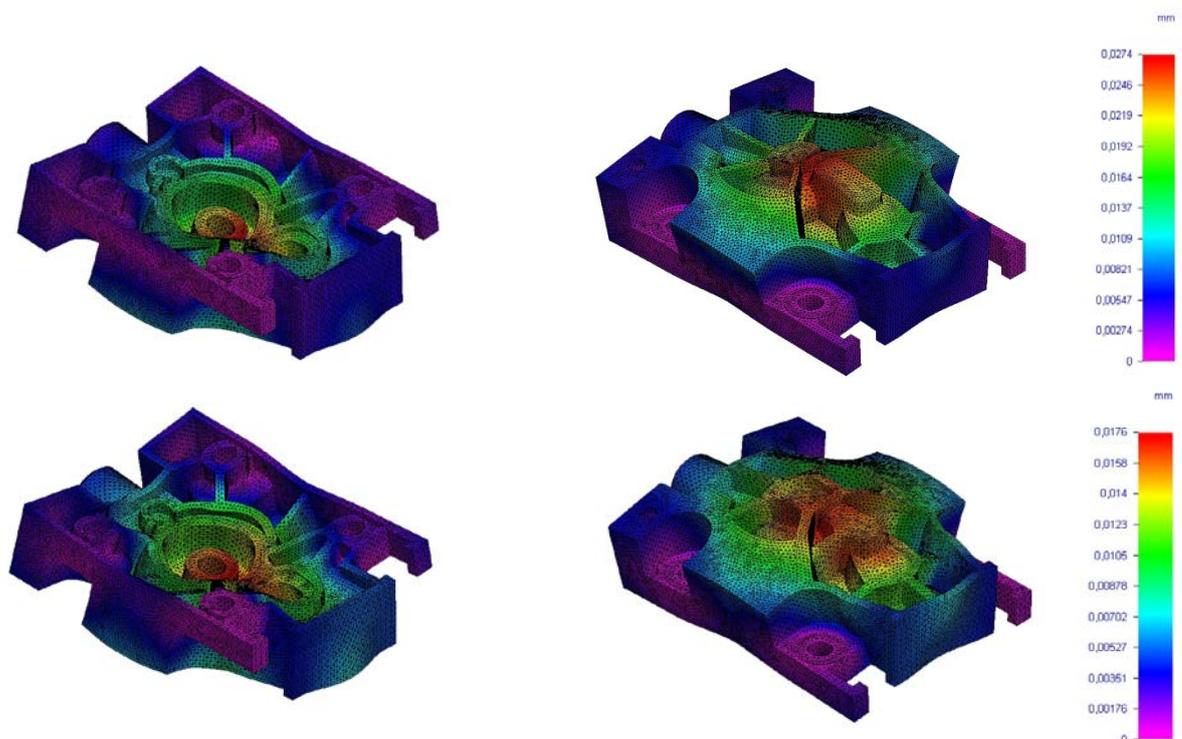


Abb. 2 Optimierung Pumpendeckel (Innen- und Außenansicht)

Abbildung 3 zeigt die Ausgangsvariante (links) sowie die optimierte akzeptable Weiterentwicklung (rechts) im Vergleich. Zahlreiche Stege wurden im Querschnitt verstärkt (rote Pfeile). Auf der Außenseite wurden sie teilweise zudem höher ausgeführt. Einige versteifende Geometrien wurden ergänzt (blaue Pfeile).

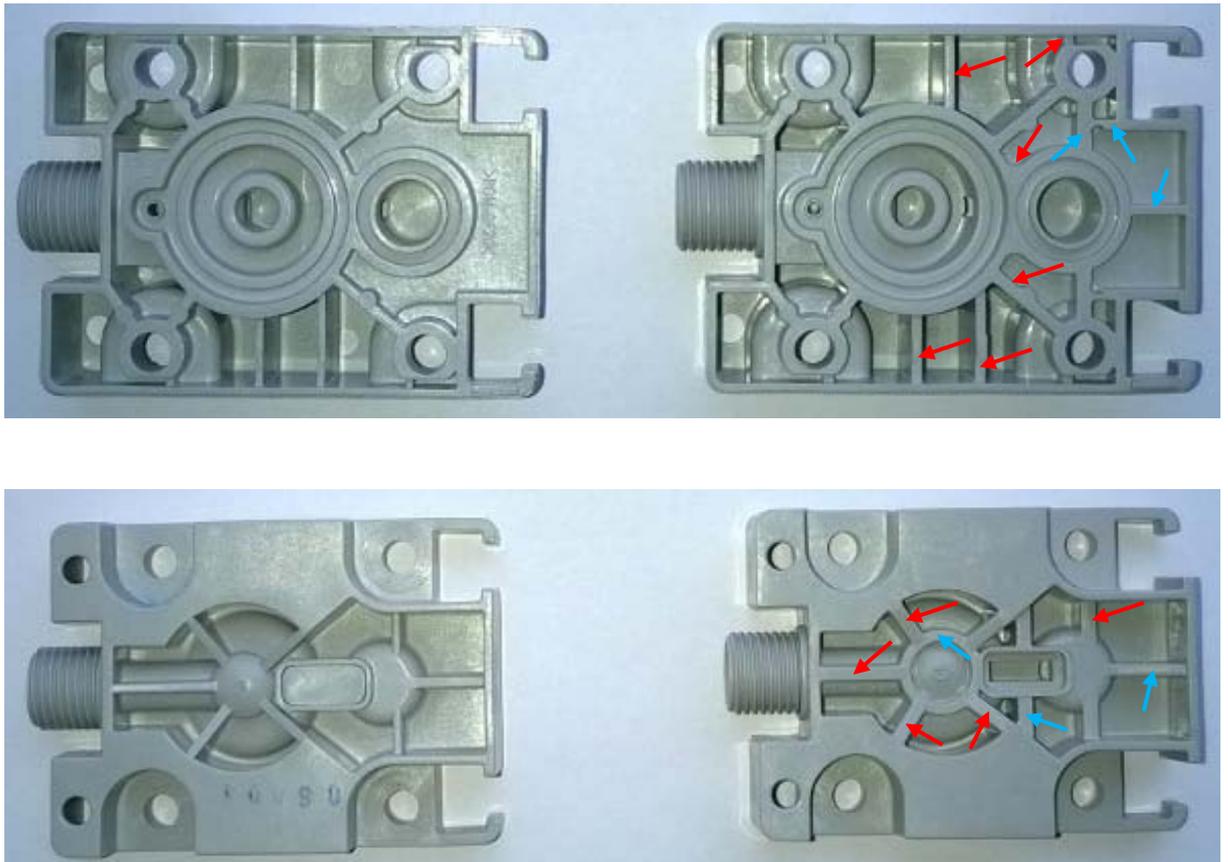


Abb. 3 Pumpendeckel in Innen- und Außenansicht (alt und neu)

Auf Grund der komplexen Geometrien können hier „händische“ Rechnungen nicht mehr zielführend sein. Die Zahl notwendiger Prototypen und Funktionsmuster konnten hier durch die FEM deutlich reduziert werden. Zudem wurde die Entwicklungszeit des Deckels erheblich verkürzt.

Dieser generellen Zielsetzung folgt der Selbstlernkurs. In Kapitel 2 erlernen Sie zunächst die grundsätzliche Handhabung des Werkzeugs Simulation von SolidWorks auf Basis der Education-Version 2014/15. In Kapitel 3 werden die wichtigsten Beanspruchungsarten Biegung und Torsion untersucht und entsprechende Erkenntnisse für eine geeignete Profilauswahl abgeleitet. Kapitel 4 vertieft Kenntnisse zur geeigneten Auswahlwahl der Vernetzung und leitet Fehlerpotenziale aus dem Einsatz ungeeigneter Netztypen und Vernetzungen ab. Kapitel 5 befasst sich mit der Untersuchung von Kerbgeometrien in ihrer Auswirkung auf die Maximalspannung und listet entsprechende Gestaltungsregeln für Bauteile auf. Kapitel 6 rundet die Einführung mit einer Geometrieoptimierung unter Gewichtsaspekten hinsichtlich einer vorgegebenen Biegespannung ab.

Bezüge auf das Fachbuch „Roloff/Matek: Maschinenelemente“ werden mit „R/M“ gekennzeichnet und beziehen sich auf die 20. Auflage. Um Rechenzeiten zu sparen, ziehen Sie die Vorlagendatei auf die Festplatte Ihres Rechners.

Im Abschluss sei zu sagen, dass die FE-Methode nur ein wegweisendes Tool ist. Es nimmt dem Konstrukteur keinerlei Entscheidungen ab.

2 Einführung in die FEM

In diesem Selbstlernkurs werden nur statisch-lineare Analysen durchgeführt (äußere Belastung ist konstant/ruhend) sowie von weiteren allgemeinen idealisierten Rahmenbedingungen ausgegangen.

Die Einführungsstudie wird anhand eines Beispiels auf Zugbeanspruchung durchgeführt. Dieses und alle weiteren Beispiele finden Sie als Modelle in der beigefügten Vorlagendatei.

2.1 Handrechnung

Kraft: $F = 10.000 \text{ N}$
Kantenlänge $40 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm}$
Anfangslänge: $l_0 = 100 \text{ mm}$
Material: S235JR (unlegierter Baustahl)

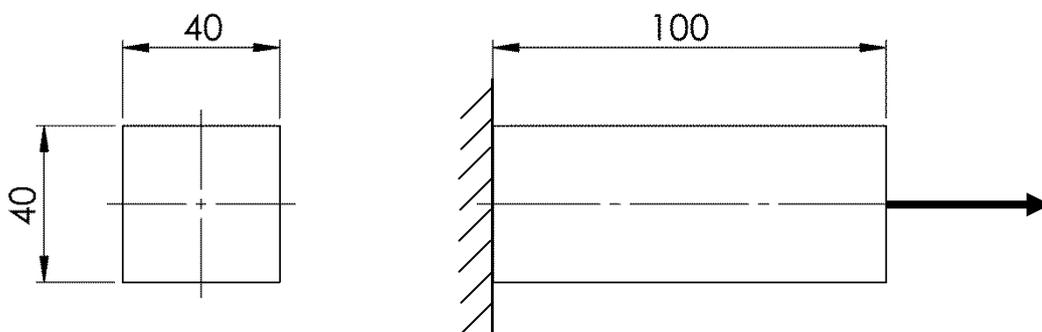


Abb. 4 2D-Zeichnung Rechteck

Berechnung:

$$A = 40 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm} = 1600 \text{ mm}^2$$

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{F}{A} = \frac{10.000 \text{ N}}{1600 \text{ mm}^2} \\ &= \underline{\underline{6,25 \text{ Nmm}^{-2}}}\end{aligned}$$

2.2 Start der FEM-Analyse

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie eine FEM-Analyse mit SolidWorks Simulation durchgeführt wird. Ziehen Sie den Vorlagenordner zunächst auf die Festplatte und öffnen Sie die Bauteile auch nur dort. Im Verlauf der Analysen werden Dateien erstellt, die dann entsprechend auf der Festplatte abgelegt werden und so die Rechenleistung nicht unnötig drosseln.

Im Auslieferungszustand ist SolidWorks Simulation nicht voreingestellt und muss erst noch freigeschaltet werden.

2.3 Freischalten der SolidWorks Simulation



Abb. 5 Menüleiste

Unter dem Menü **Extras** muss der Dialog **Zusatzanwendungen** angewählt werden.

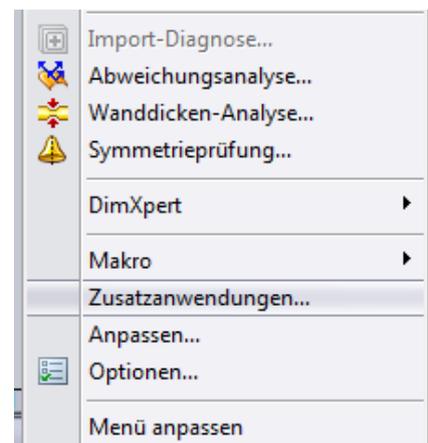


Abb. 6 Taskleiste

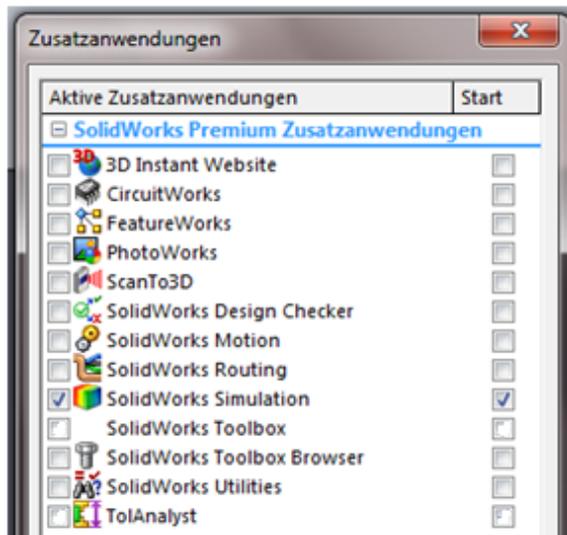


Abb. 7 Dialogfenster

Hier setzen Sie einen Haken vor und hinter **SolidWorks Simulation** (Abb. 7) und bestätigen mit OK.

2.4 Öffnen einer neuen Studie

Das Modell soll nun durch SolidWorks Simulation berechnet werden.

1. Öffnen Sie das Modell für das Bauteil (Rechteck.sldprt) aus der Vorlagendatei.
2. Starten Sie **Neue Studie**.
Dazu wählen Sie den Reiter **Simulation** an und öffnen das Untermenü **Studien-Berater** durch Klick auf den kleinen **Pfeil** darunter (Abb. 8).
Wählen Sie **Neue Studie**.

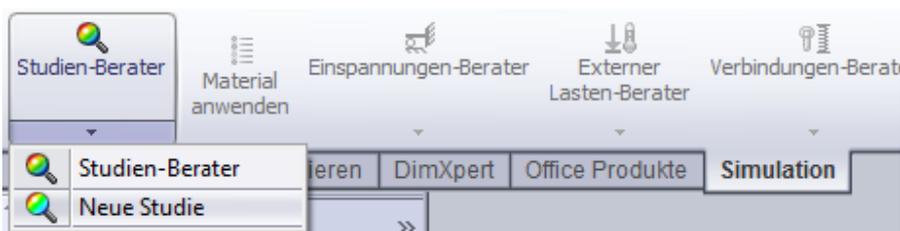


Abb. 8 Reitermenü mit Studienfenster

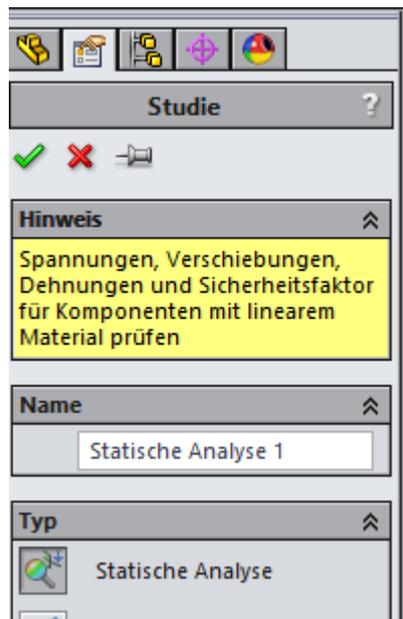


Abb. 9 Voreinstellung

- Wählen Sie **Statisch** als Studie aus der Voreinstellung aus (Abb. 9) und bestätigen dann mit dem **grünen Haken**. Es erscheint nun an der linken Seitenleiste der **Studienmanager** (Abb. 10).

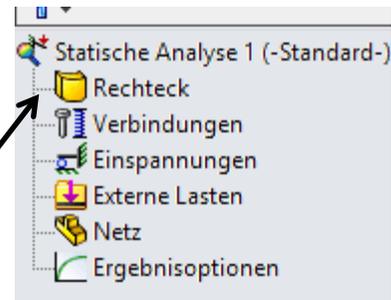


Abb. 10 Studienmanager

- Weisen Sie dem Bauteil ein Material zu. Dazu Rechtsklick auf **Rechteck** (Abb. 10) | **Material anwenden/bearbeiten**. Wählen Sie dann im Verzeichnisbaum links im Dialogfenster **Material | solidworks materials | Stahl | unlegierter Baustahl** (Abb. 11). Bestätigen Sie mit **Anwenden** und verlassen Sie das Fenster mit dem Button **Schließen**.

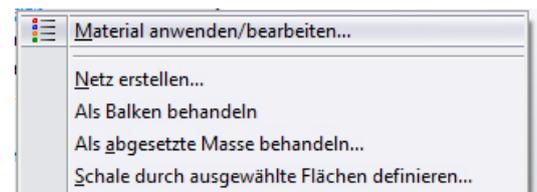


Abb. 11 Material Definition

5. Um ein Modell belasten zu können, muss es an einer Seite fixiert werden. Dieses geschieht durch Rechtsklick auf **Einspannungen** im Studienmanager. Wählen Sie **Fixierte Geometrie**.

Es erscheint ein Fenster in dem Sie verschiedene Möglichkeiten der Fixierung haben. Da es sich hierbei um eine feste Einspannung handeln soll, kann man für die Fläche eine fixierte Geometrie wählen. Klicken Sie also auf **Fixierte Geometrie** (Abb. 12) und auf eine der **Stirnflächen** des Bauteils (Abb. 13) und bestätigen Sie mit dem **grünen Haken**.

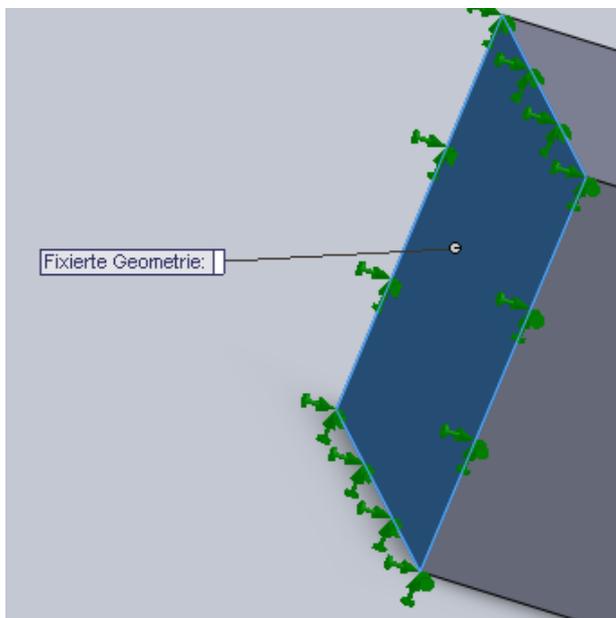


Abb. 13 Anwahl der Stirnfläche

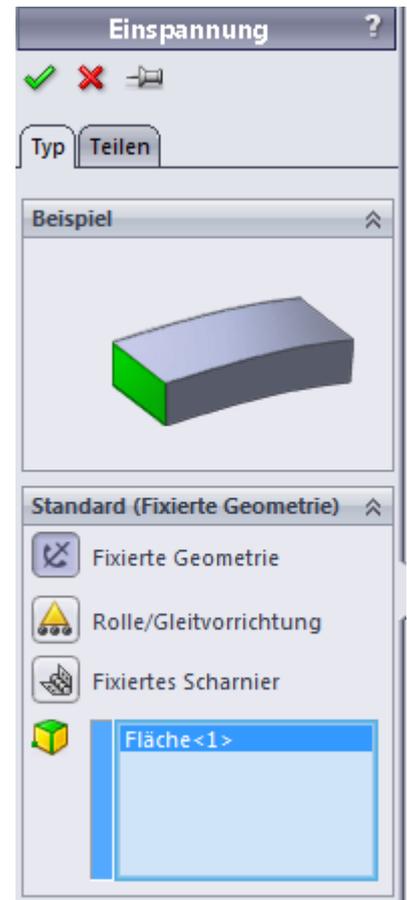


Abb. 12 Fenster Fixierte Geometrie

6. Definieren Sie eine Kraft mit Rechtsklick auf **Externe Lasten** (Abb. 14). Auf der gegenüberliegenden Seite soll die **Kraft** von 10.000 N angreifen (Abb. 15). Damit das Rechteck auf Zug belastet wird, muss **Richtung umkehren** aktiviert werden (Abb. 16). Bestätigen Sie mit dem **grünen Haken**.

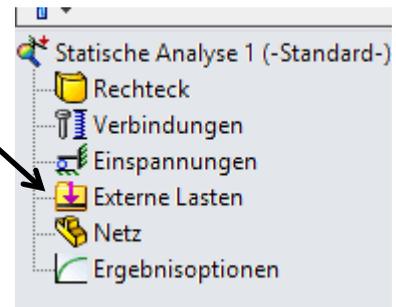


Abb. 14 Studienmanager

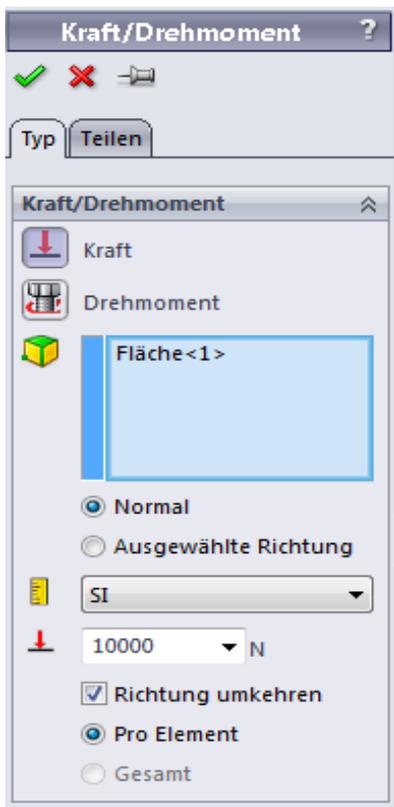


Abb. 15 Beanspruchte Stirnfläche auf Zug

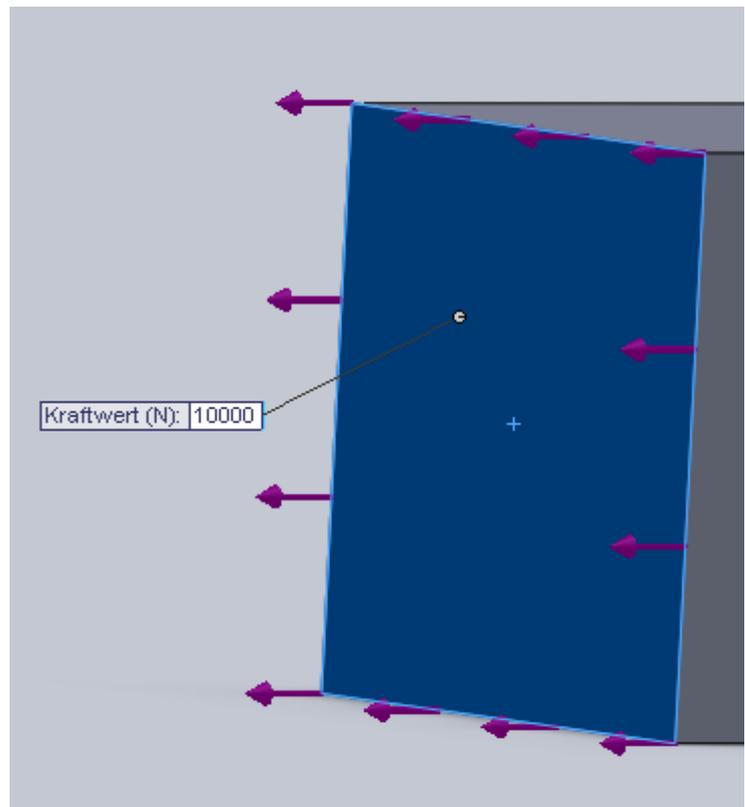


Abb. 16 Fenster Kraft

2.5 Vernetzung

7. Erstellen Sie das Netz mit Rechtsklick auf **Netz** | **Netz erstellen** (Abb. 17) und bestätigen Sie mit dem **grünen Haken**.

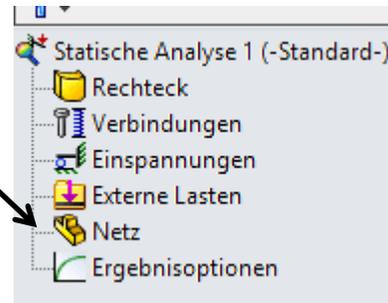


Abb. 17 Studienmanager

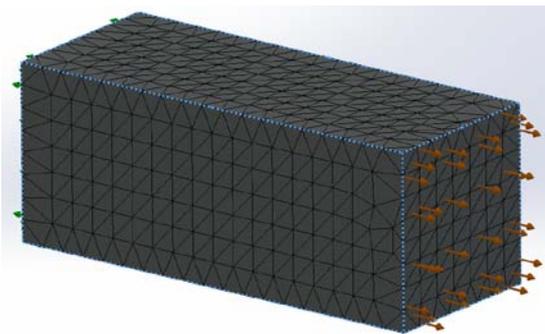


Abb. 18 Vernetztes Bauteil

Das Netz unterteilt das Bauteil in kleine (finite) Elemente (Abb. 18) und stellt die Grundlage für den nachfolgenden Berechnungsgang dar. Je kleiner die Elementgröße gewählt wird, desto engermaschiger ist das Netz und umso geringer ist in der Regel die Abweichung vom tatsächlichen Festigkeitswert. Allerdings bedeutet ein zunehmend feineres Netz einen immer höheren Rechenaufwand.



Abb. 19 Fenster für die Vernetzungssteuerung

SolidWorks arbeitet in der Voreinstellung mit mittlerer Netzgröße. Übernehmen Sie vorerst diese Voreinstellung (Abb 19).

8. Führen Sie die Analyse durch. Dazu **Rechtsklick auf Studie | Ausführen** (Abb. 20). Es erscheint nun der Ergebnisordner im Verzeichnisbaum (Abb. 21). Dort kann das Werkstück auf Spannung, Verschiebung und Dehnung untersucht werden.

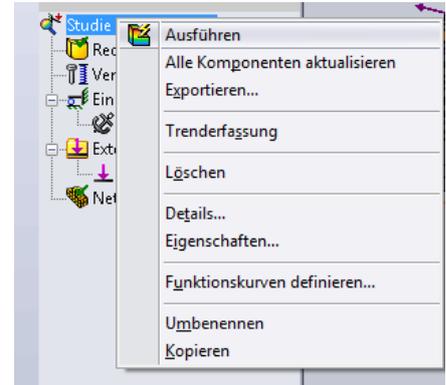


Abb.20 Studienmanager mit Ausführungsfenster

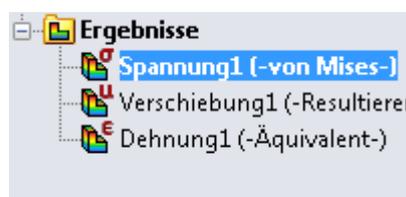


Abb. 21 Ergebnisordner

Hinweis: Die Befehle zur FEM können alternativ auch in der oberen Taskleiste angewählt werden.

Mit Rechtsklick auf **Spannung** | **Definition bearbeiten** (Abb. 21) gelangen Sie in das Fenster **Spannungsdarstellung**. Hier ändern Sie die Ausgabe der Einheiten in **N/mm² (MPa)** (Abb. 22).

Unter **Diagrammoptionen** stellen Sie die Darstellung von **Wissenschaftlich** auf **Allgemein**.

Die voreingestellte Spannungsart belassen sie auf „Von-Mises“ (GEH, vgl. R/M Gl. 3.5). Sie bezeichnet das Gesamtergebn aller im Bauteil auftretenden Spannungen (vgl. auch Kapitelende)..

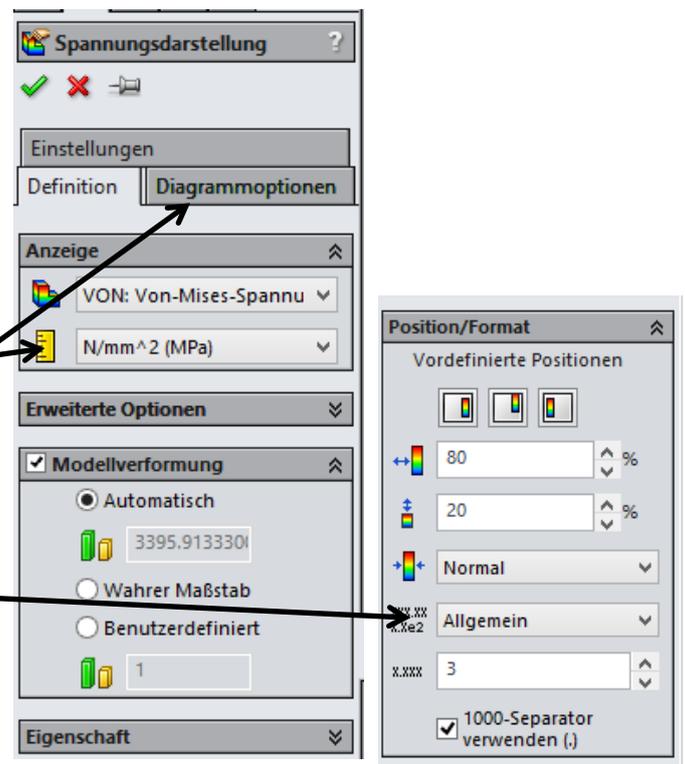


Abb. 22 Einheiten

Für alle weiteren Berechnungen sollte die Angabe der Einheit in der Voreinstellung geändert werden. Dazu wählen Sie in der Taskleiste **Simulation | Optionen | Standardoptionen**. Im Auswahlménü auf der rechten Seite wählen Sie für die Einheit **Druck/Spannung** entsprechend **N/mm²(MPa)** aus (Abb. 23).

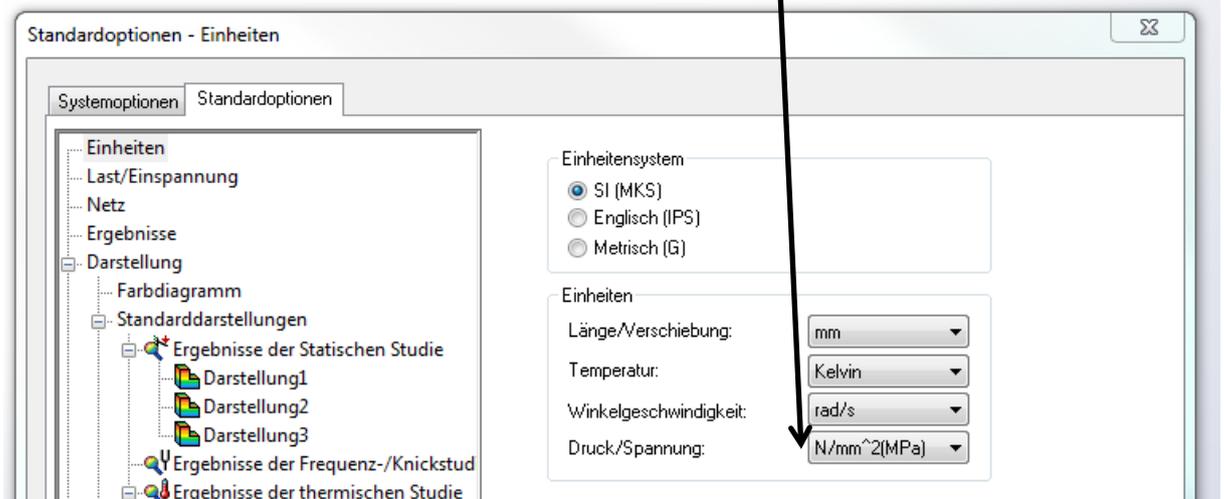


Abb. 23 Voreinstellung der Einheit

In der aktuellen Darstellung wird über Farben der Spannungsverlauf im Bauteil dargestellt (Abb. 24). In der Taskleiste können Sie über einen Klick auf **Verformungsergebnis** die Verzerrung unterdrücken.



Abb. 24 Simuliertes Bauteil mit einer maximalen Von-Mises-Spannung von 10,7 Nmm⁻²

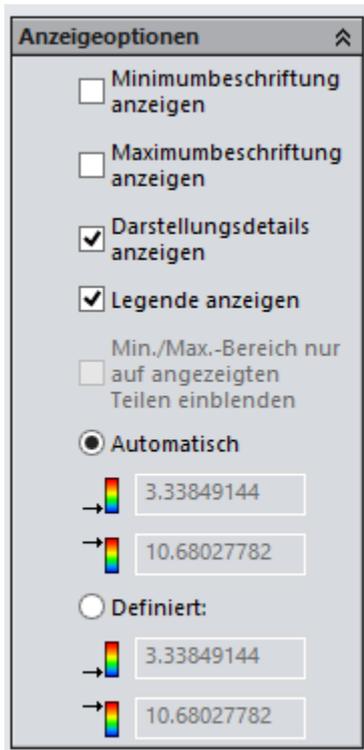


Abb. 25 Checkbox für Diagrammoptionen

Mit einem Doppelklick auf die Legende (Abb. 24, rechts) können verschiedene Einstellungen für die Ansicht verändert werden. Das Fenster **Diagrammoptionen** (Abb. 25) öffnet sich auf der linken Seite. In dem Fenster können unterschiedliche Checkboxes betätigt werden.

Durch das Anklicken der Checkboxes von **Minimum-/Maximumbeschriftung anzeigen** werden im Bauteil die Min/Max-Spannungen als Textfeld sichtbar. Ist der Button **Automatisch** angewählt, so ist die Legende nach den Mindest- und Maximalwert gegliedert.

Mit dem Button **Definiert** kann der Bediener einen beliebigen Bereich wählen. Im Beispiel ist dieses der Minimalwert der Spannung und die Streckgrenze. Dieser Bereich ist so zu wählen, dass er die tatsächliche Streckgrenze beinhaltet.

In der Interpretation sollen nun die Ergebnisse der Handrechnung mit denen aus der FEM-Analyse verglichen werden. Die Zugspannung beträgt nach Handrechnung $6,25 \text{ Nmm}^{-2}$.

Um nun die Ergebnisse zu vergleichen, führen Sie einen Rechtsklick aus auf **Spannung | Sondieren** (Abb. 26).

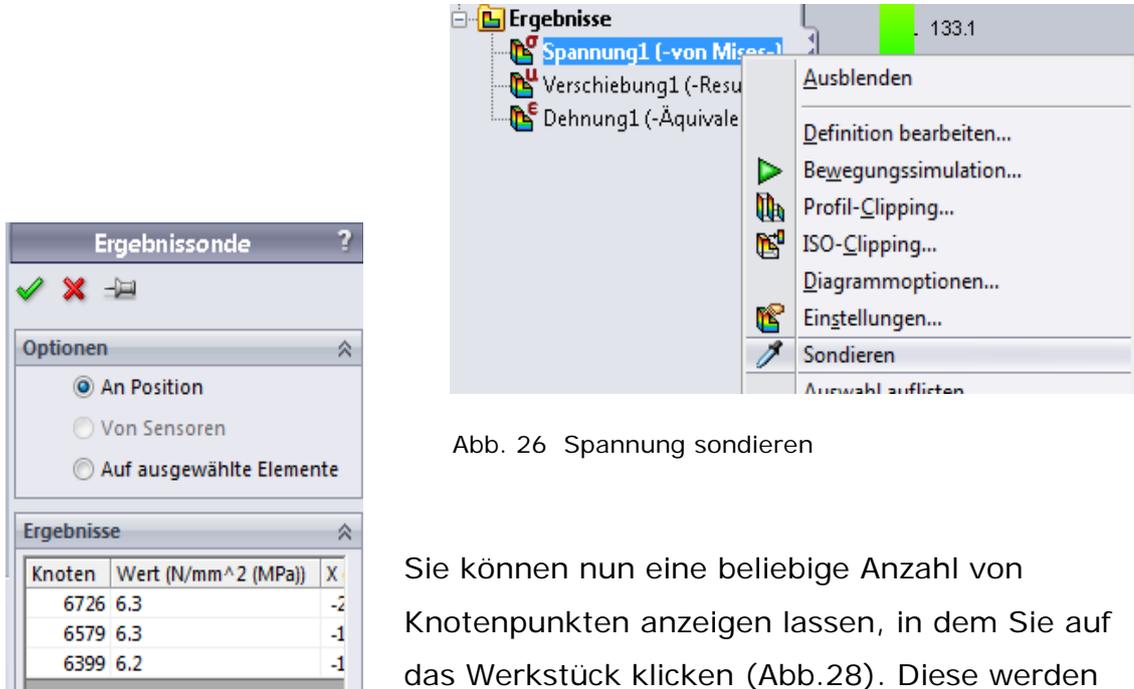


Abb. 26 Spannung sondieren

Sie können nun eine beliebige Anzahl von Knotenpunkten anzeigen lassen, in dem Sie auf das Werkstück klicken (Abb.28). Diese werden in der Ergebnissonde tabellarisch dargestellt (Abb.27).

Abb. 27 Ergebnissonde

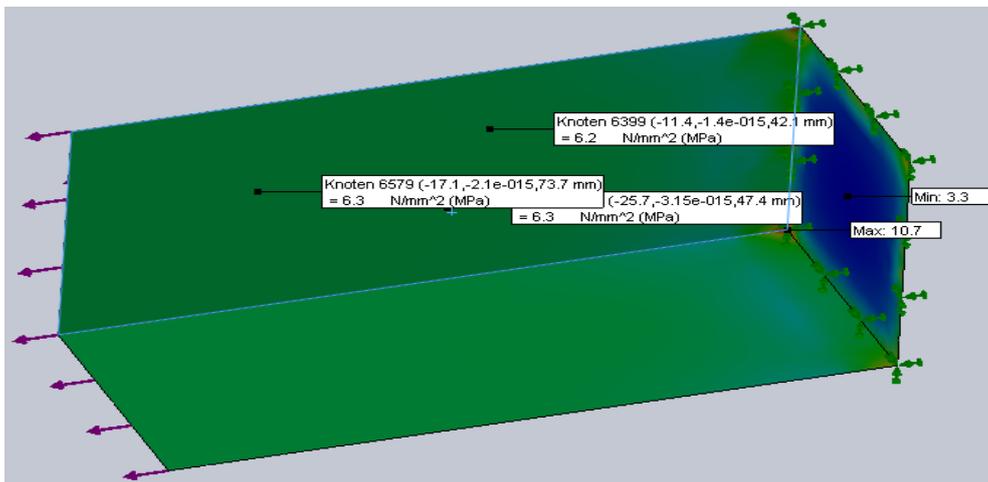


Abb. 28 Bauteil mit definierten Knotenpunkten

An den abgelesenen Knotenpunkten wird die Zugspannung überwiegend mit einem Festigkeitswert um $6,3 \text{ Nmm}^{-2}$ angezeigt. Dieser Wert stimmt mit der Handrechnung gut überein. Allerdings ergibt die Analyse auch, dass die maximale Von-Mises-Spannung $10,7 \text{ Nmm}^{-2}$ beträgt. Dem Anwender stellt sich nun als Frage, wieso der maximale Wert den mutmaßlich korrekten Wert um über 70% übersteigt.

Hierzu ist grundsätzlich zu sagen, dass der hier von der FEM ermittelte Wert nach der so genannten Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) von „Von-Mises“ berechnet wurde. Diese Gleichung verrechnet alle im Bauteil auftretenden Spannungen, während die vorangestellte Handrechnung idealisiert nur von Zug ausgegangen ist.

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3(\alpha_0 \cdot \tau_t)} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \left(\frac{\sigma_{zul}}{\varphi \cdot \tau_{zul}} \cdot \tau_t \right)} \quad \text{Formel GEH (vgl. R/M Gl. 3.5)}$$

Eine einzelne isolierte Spannungsart kommt in der Realität aber fast nie vor. So wirken auf den Beispielkörper über das Eigengewicht mindestens noch eine Biegespannung und eine Scherspannung. In der Berechnungspraxis zeigt sich, dass die verkürzte Handrechnung bei sorgfältiger Abwägung der Rahmenbedingungen in der Regel hinreichend genau ist. Aber auch die Einbeziehung dieser Einflüsse würde die starke Abweichung hier nicht erklären.

Ursache für die Differenz ist die mathematische Methode, auf deren Grundlage die FEM-Analyse gerechnet wird. Sie führt u.a. an scharfkantigen Übergängen zu starken Abweichungen von der Realität. Dieses Phänomen der *Spannungssingularität* wird nachfolgend genauer untersucht (Kap. 3). Die Simulation hat sich also nicht „verrechnet“. Vielmehr ist die Methode ungeeignet in der Betrachtung scharfkantiger Geometrien. Der tatsächliche Spannungswert beträgt also auch am Rand ca. $6,3 \text{ Nmm}^{-2}$ entgegen der Ergebnisanzeige der Simulation.

Merke: Das Programm rechnet immer richtig! Falsch sind immer nur die vom Anwender getroffenen Annahmen und Randbedingungen oder Interpretation der Ergebnisse.

3 Grundlagen der Vernetzung

Sie können bei SolidWorks Simulation auf fünf verschiedene Elementtypen für die Vernetzung zurückgreifen:

- Tetraedische Volumenkörperelemente 1. und 2. Ordnung
- Dreieckige Schalenelemente 1. und 2. Ordnung
- Balken und Stabelemente

Tetraedische Volumenkörper 1. Ordnung besitzen in jeder Ecke einen Knoten. Tetraedische Volumenkörper 2. Ordnung dagegen besitzen sechs Knotenpunkte mehr, da jede Kante mittig noch einen weiteren besitzt. Somit ist das Netz tetraedischer Volumenkörperelemente 2. Ordnung dichter gepackt und liefert deshalb ein detaillierteres Ergebnis.

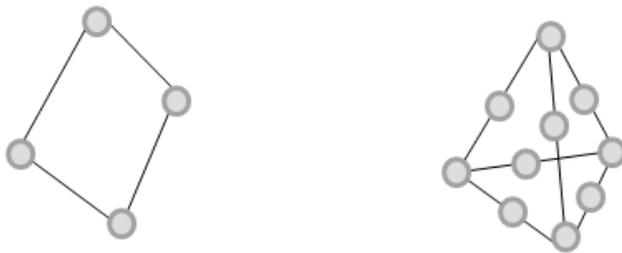


Abb. 29 Tetraedische Volumenkörperelemente 1. und 2. Ordnung

Analog zu tetraedischen Volumenkörperelementen 1. und 2. Ordnung gibt es die dreieckigen Schalenelemente 1. und 2. Ordnung. Die Schalenelemente werden für die Vernetzung von Blechen oder ähnlichen Bauteilen verwendet.

In den nachfolgenden Beispielen wird u.a. dargestellt, wie diese Elementtypen angewendet werden können. Balken und Stabelemente werden in diesem Selbstlernkurs nicht erläutert.

3.1 Spannungssingularitäten als Fehler in der FEM-Analyse

Im folgenden Beispiel werden Abweichungen der Simulation von der Realität als Folge so genannter *Spannungssingularitäten* erläutert. Das betrachtete Modell basiert auf dem Bauteil der vorherigen Analyse (unlegierter Baustahl), nur dass ein Rechteck 70x70x10 als Halteplatte angefügt wird. Die Zugspannung bleibt somit mit $6,25 \text{ Nmm}^{-2}$ gleich.

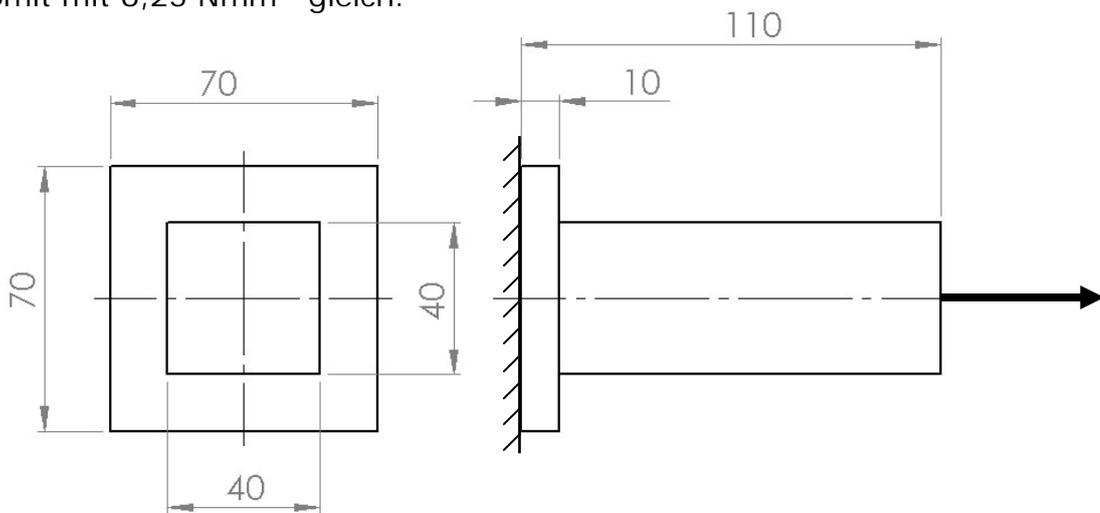


Abb. 301 Veränderter Volumenkörper

Öffnen Sie eine neue Studie. Legen Sie eine **Fixierte Geometrie** an der großen Stirnfläche fest und definieren eine Kraft von 10.000 N an der kleinen Stirnfläche. An den folgenden Studien werden nun immer die maximale „Von-Mises-Spannung“ und die maximale Verschiebung ermittelt.

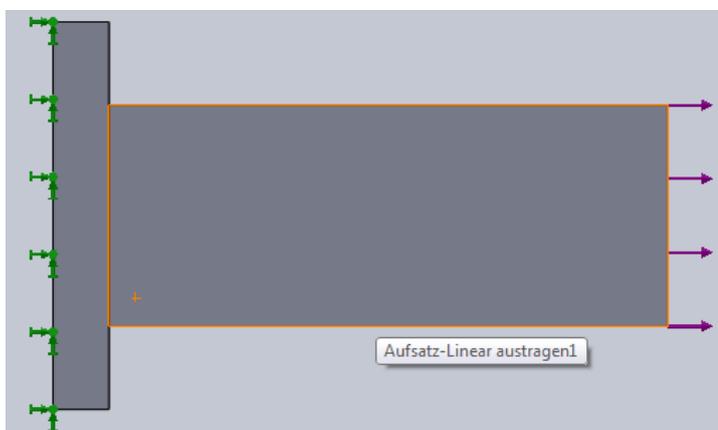


Abb. 31 3D-Körper des neuen Modells

1. Vernetzen Sie das Bauteil mit einer Elementgröße von 4 mm.

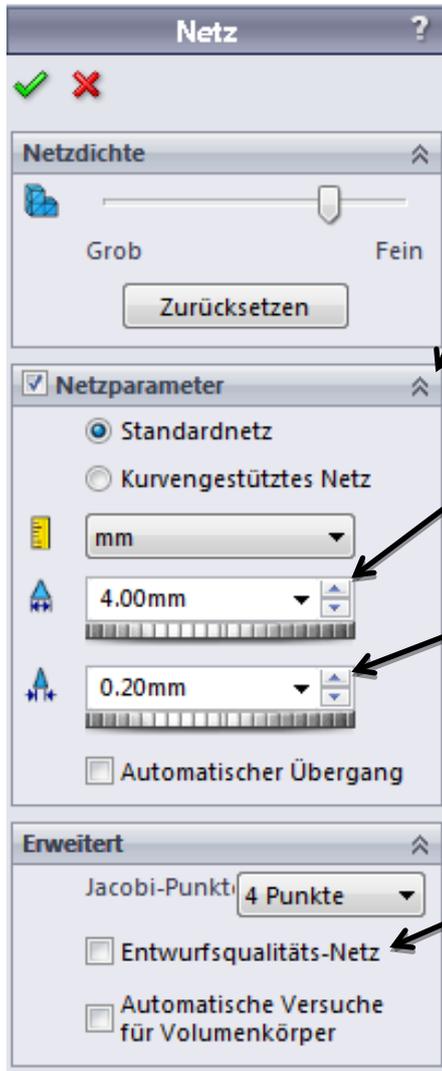


Abb. 32 Vernetzungssteuerung

Dazu Rechtsklick auf **Netz | Netz erstellen**. Dort öffnen Sie das Fenster **Netzparameter** durch einen Klick auf den Doppelpfeil (Abb. 32).

Hier setzen Sie den Radiobutton auf **Standardnetz**.

Im **Drehfeld** setzen Sie **Globale Größe** auf 4mm.

Die **Toleranz** ändert sich selbständig auf 0,2 mm. Es ist aber auch möglich, diese selbst zu definieren.

Es werden automatisch tetraedische Volumenelemente 2. Ordnung gewählt, wenn das **Entwurfsqualitäts-Netz** nicht aktiviert ist.

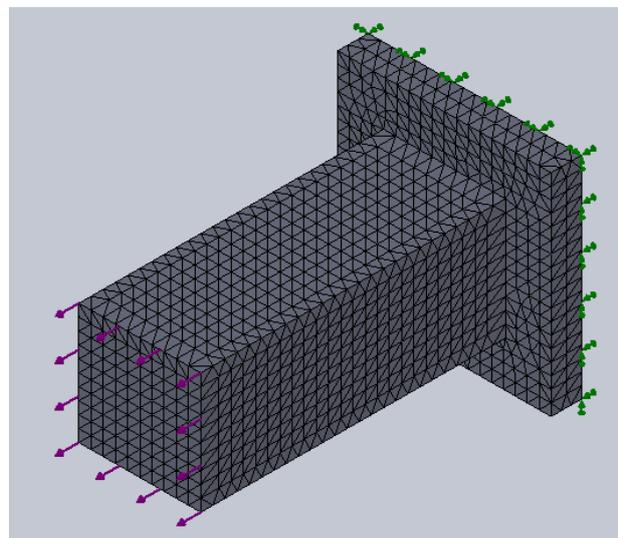


Abb. 33 Vernetzter Körper (Elementgröße 4 mm)

Führen Sie die Analyse durch und lassen Sie sich die Ergebnisse anzeigen. Um im weiteren Verlauf die Auswirkungen von Spannungssingularitäten erkennen zu können, wird die Verschiebedarstellung in die Analysen einbezogen.

Dazu Doppelklick auf **Verschiebung** im Ergebnisordner (Abb. 34).



Abb. 34 Ergebnisordner

Die Verschiebung zeigt die Verlängerung des Körpers in Millimeter an. Ändern Sie die Voreinstellungen über die Diagrammoptionen der Verschiebedarstellung auf Mikrometer mit 4 Nachkommastellen.

Spannungsdarstellung

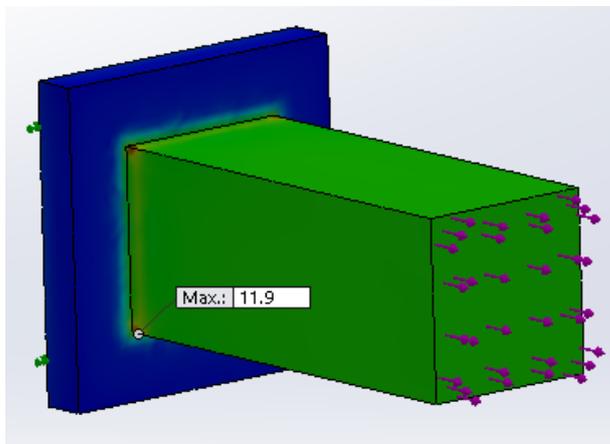


Abb. 35 maximale Von-Mises-Spannung
11,9 Nmm⁻²

Verschiebedarstellung

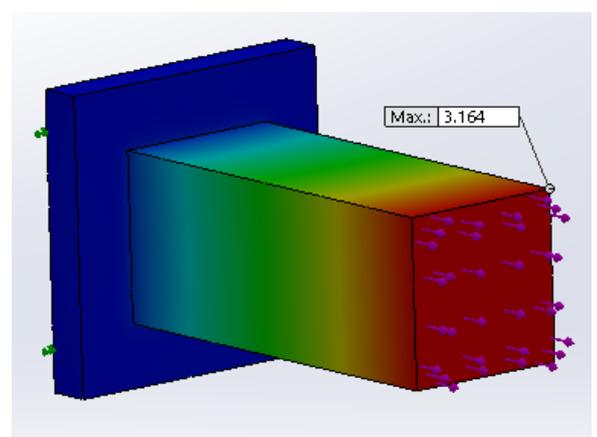


Abb. 36 maximale Verschiebung
3,164 µm

Die maximale Von-Mises-Spannung beträgt nun 11,9 Nmm⁻² bei einer maximalen Verschiebung von 3,164 µm. Die Spannung ist somit im Vergleich zur ersten Analyse gestiegen. Über die Verschiebung kann noch keine Aussage getroffen werden, da diese im ersten Beispiel unberücksichtigt blieb.

2. Ändern Sie die Netzdichte des Bauteils. Dazu Rechtsklick auf **Netz** | **Vernetzungssteuerung anwenden** (Abb. 37).

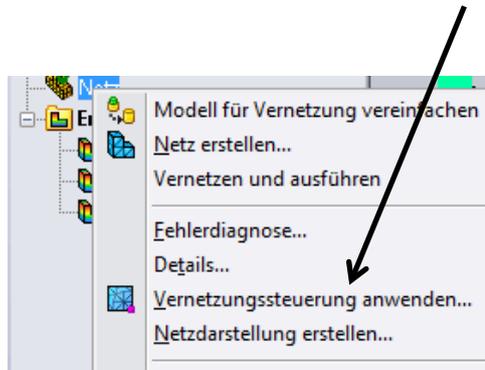


Abb. 37 Vernetzungssteuerung

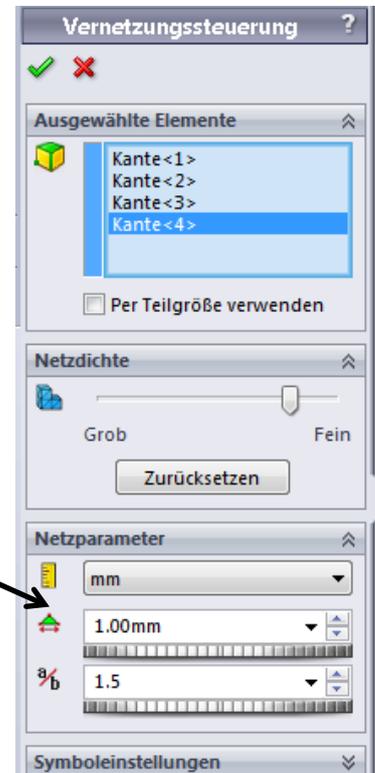


Abb. 38 Fenster der Vernetzungssteuerung

Wählen Sie die vier Kanten des Bauteils aus (Abb. 39 hellblau gekennzeichnet) und setzen Sie die **Elementgröße** im **Drehfeld** auf **1mm**. Durch die Auswahl einer gezielten Verkleinerung der Netzstruktur (Abb. 40) wird das Ergebnis örtlich genauer bestimmt. Am übrigen Modell kann weiterhin mit einer Elementgröße von 4 mm gearbeitet werden. Eventuell müssen sie mit Cursor noch das Feld darunter anklicken, um auch hier die Änderung wirksam zu übernehmen.

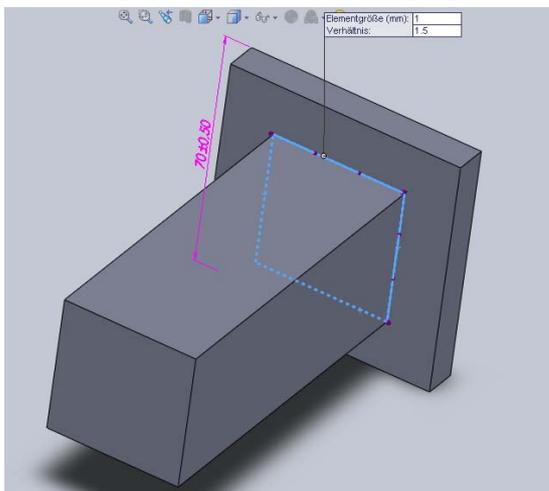


Abb. 39 Kantenauswahl zur Verdichtung

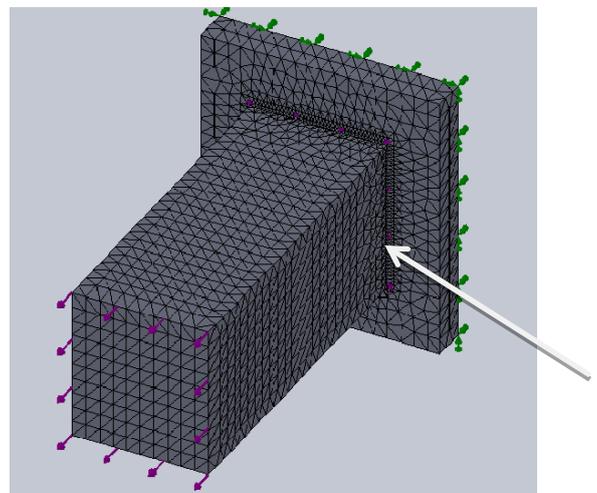


Abb. 40 Örtlich verdichtete Netzstruktur auf 1 mm

Führen Sie die Studie durch.

Spannungsdarstellung

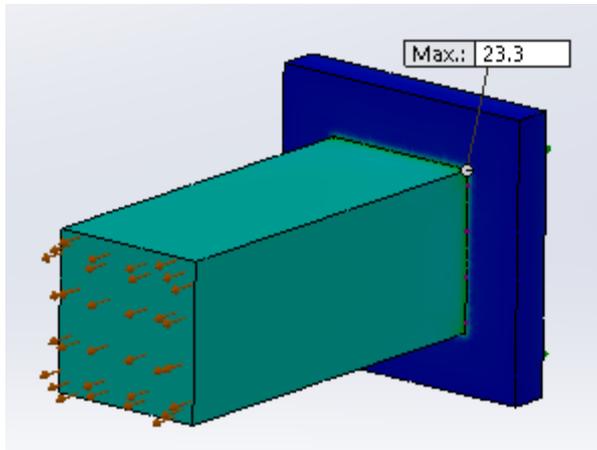


Abb. 41 maximale Von-Mises-Spannung
 $23,3 \text{ Nmm}^{-2}$

Verschiebedarstellung

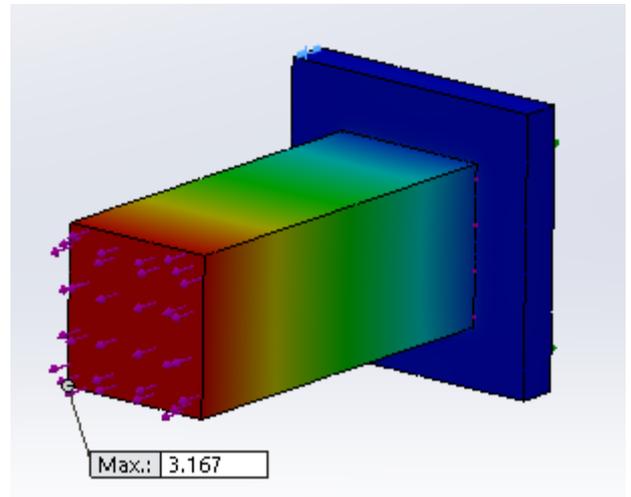


Abb. 42 maximale Verschiebung
 $3,167 \mu\text{m}$

Die maximale Spannung hat sich von $11,9 \text{ Nmm}^{-2}$ auf $23,3 \text{ Nmm}^{-2}$ erhöht (Abb. 41) und damit fast verdoppelt. Wegen des örtlich feineren Netzes war eine Veränderung zu erwarten. Die Höhe der Abweichung überrascht jedoch zunächst. Die Verschiebung ändert sich dagegen gering um $3 \mu\text{m}$ (Abb. 42).

3. Vernetzen Sie die Kanten erneut mit einer Elementgröße von $0,5 \text{ mm}$.

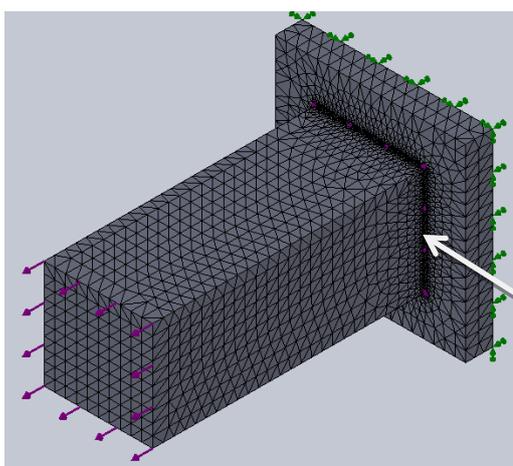


Abb. 43 Vernetzungssteuerung auf $0,5 \text{ mm}$

Die Vernetzungssteuerung an der scharfen Kante.

Führen Sie die Studie durch.

Spannungsdarstellung

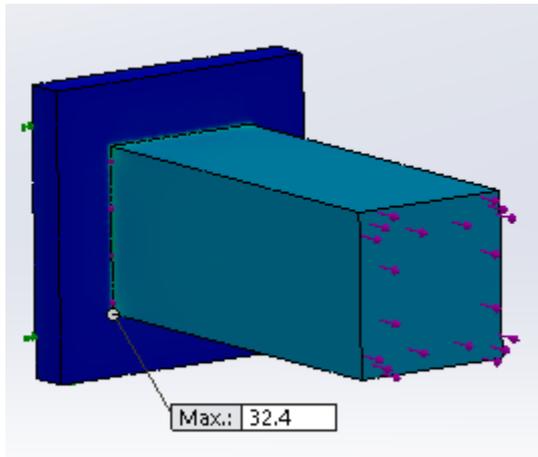


Abb. 44 maximale Von-Mises-Spannung
32,4 Nmm⁻²

Verschiebedarstellung

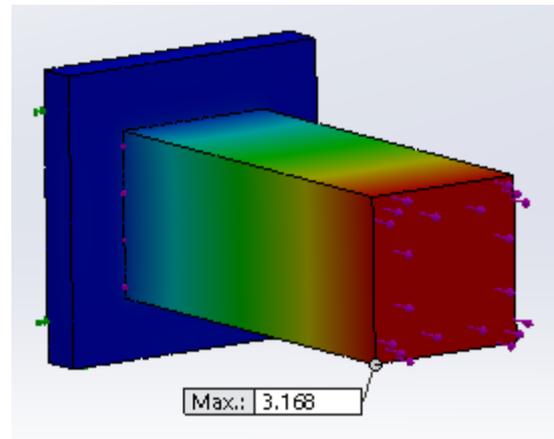
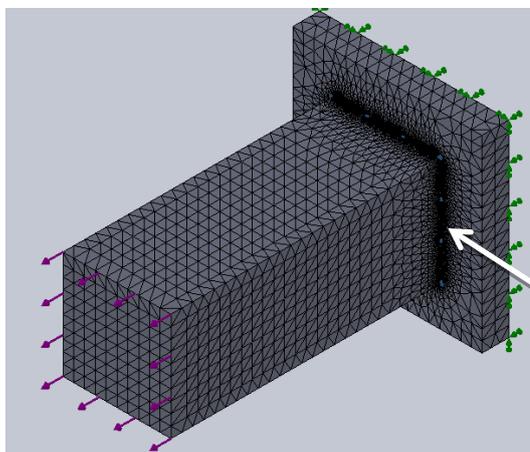


Abb. 45 maximale Verschiebung
3,168 µm

Die maximale Spannung steigt weiter in großen Sprüngen an (Abb. 44). Der Wert der Verschiebung verändert sich im Vergleich nur um weitere 1 µm (Abb. 45). Man spricht hier vom *Konvergieren* der Werte. Das starke Ansteigen der Spannungswerte wird als *Divergieren* bezeichnet.

4. Im dritten Durchlauf wird die Vernetzungssteuerung mit der Elementgröße von 0,1mm erneut verringert (Abb. 46).



Die Vernetzungssteuerung an der scharfen Kante.

Abb. 46 Vernetzungssteuerung auf 0,1 mm

Führen Sie die Analyse durch.

Spannungsdarstellung

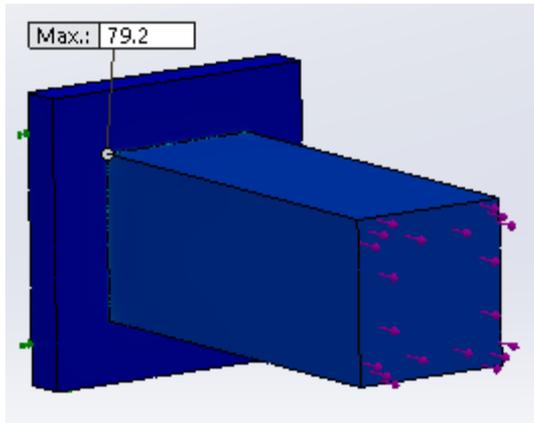


Abb. 47 maximale Von-Mises-Spannung
79,2 Nmm⁻²

Verschiebedarstellung

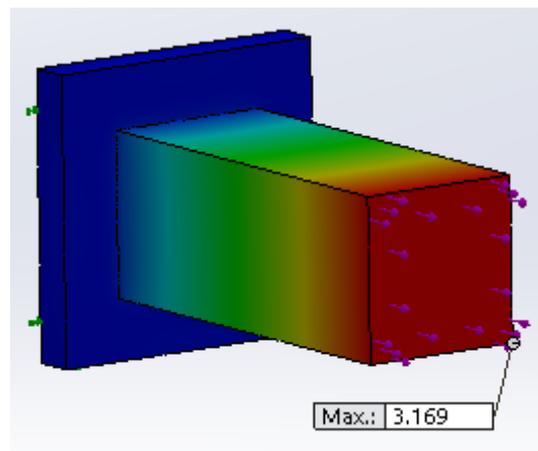


Abb. 48 maximale Verschiebung
3,169 µm

Auch in dieser Studie zeigt sich, dass die Spannungswerte immer weiter ansteigen. Die Verschiebungswerte ändern sich wieder nur geringfügig. Die Von-Mises-Spannungen divergieren also mit zunehmender Verfeinerung des Netzes, während die Werte für die Verschiebung konvergieren.

Hinweis:

Es kann je nach Softwareversion und ggf. unterschiedlichen Rechnersystemen zu geringen Differenzen zu den hier dargestellten Werten kommen. Ohnehin muss bei der FEM mit einer prozentualen Fehlerabweichung zwischen 7 und 10% ausgegangen werden.

Gegenüberstellung der Ergebnisse

Alle Studien wurden mit der Elementgröße 4mm für die allgemeine Vernetzung durchgeführt:

	Von-Mises-Spannung (Nmm ⁻²)	Verschiebung (µm)
ohne Vernetzungssteuerung	11,9	3,164
Vernetzungssteuerung Elementgröße 1mm	23,3	3,167
Vernetzungssteuerung Elementgröße 0,5 mm	32,4	3,168
Vernetzungssteuerung Elementgröße 0,1 mm	79,2	3,169

Tabelle 1: Ergebnisse von Spannung und Verschiebung

Die Divergenz der Von-Mises-Spannung ist kein Fehler der FEM. Das mathematische Berechnungsmodell im Hintergrund führt an scharfen Kanten zu starken Abweichungen des Berechnungsergebnisses zur Realität (Merke: Das Programm rechnet immer richtig!). Nach der Elastizitätstheorie ist die Spannung an einer scharfen Kante theoretisch unendlich groß. In der Mathematik wird dieses als *singular* bezeichnet, daher stammt der Begriff *Spannungssingularität*. Dies tritt an jeder unendlich scharfen Kante auf (Übergangsradius = 0).

Will man realistische Ergebnisse, so muss das Modell an solchen Stellen mit einem kleinen Übergangsradius versehen werden. Bei Schweißkonstruktionen z.B. modelliert man beim Übergang eine Verrundung von 1mm. Im vorgestellten Beispiel wurde der Übergang mit einem Radius von 3 mm verrundet (Abb. 49).

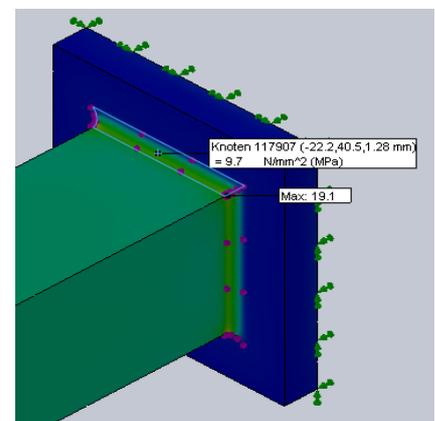


Abb. 49 Bauteil mit 3mm Radius

Durch den angebrachten Radius im Modell konvergieren die Spannungswerte bei kleiner werdender Vernetzungssteuerung gegen ca. 20 Nmm^{-2} . Es ist dabei wegen der angenäherten Symmetrie der Spannungsverteilung hinreichend, lediglich einen Übergangsradius mittels Vernetzungssteuerung genauer zu untersuchen (vgl. Abb 50). Da der Übergang als Spannungsmaximum bereits erkannt worden ist, kann die übrige Vernetzung mit der Voreinstellung belassen werden (vgl. Abb. 19). Durch diese Vorgehensweise wird Rechenzeit für die Vernetzung und Analyse gespart, ohne einen qualitativen Ergebnisverlust in Kauf nehmen zu müssen.

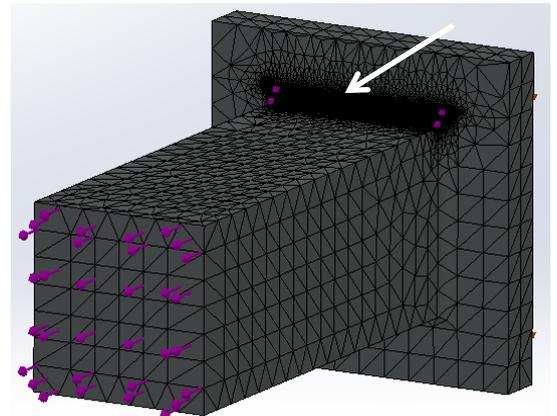


Abb. 50 eine vernetzte Kante

Im Stoßbereich betragen die Werte nur noch ca. $11,4 \text{ Nmm}^{-2}$ (Abb. 51). Bei der ersten Analyse trat dort noch die Divergenz auf. Das Maximum tritt am scharfkantigen Übergang jeweils zweier Verrundungen auf und kann als Spannungssingularität wieder vernachlässigt werden.

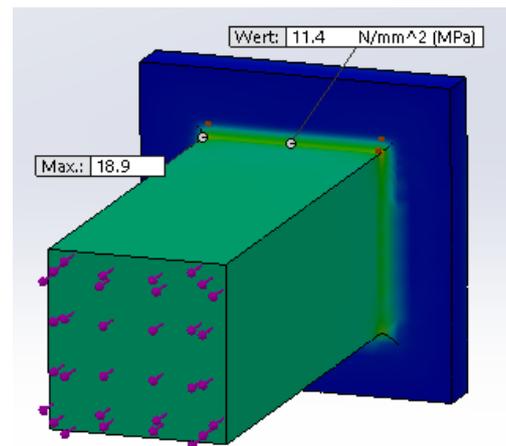


Abb. 51 Vernetzungssteuerung mit 0,5 mm

Die Verschiebung wird nicht erneut kontrolliert, da diese bereits im ersten Beispiel konvergierte. Verschiebungselemente sind die mathematischen Unbekannten in der FEM-Analyse und werden daher immer genauer definiert sein als die Spannungen. Schon eine relativ grobe Vernetzung ergibt hier schon zufriedenstellende Ergebnisse.

Die einfache Handhabung eines FEM-Tools verführt nur allzu schnell, ohne hinreichende eigene Gedankenführung den Ergebnissen der Simulation zu vertrauen – das Programm rechnet immer richtig! Unkenntnis hinsichtlich der Fehlerquellen eines solchen Werkzeugs und mögliche eigene fachliche Lücken sind die eigentlichen Ursachen für von der Realität abweichende Ergebnisse und damit für (fatale) Fehleinschätzungen. **Merke: Das Problem sitzt stets vor dem Rechner.**

Zur Abschätzung der Vertrauenswürdigkeit der Ergebnisse können folgende Hinweise helfen:

- Bei FEM-Berechnungen ist mit einem kumulierten Fehler bis ca.10% zu rechnen
- FEM-Berechnungen sind stets mit Handrechnung auf Plausibilität zu prüfen
- Die Wahl des Elementtyps bei der Vernetzung muss gut begründet sein
- An Stellen mit Spannungskonzentrationen eine Vernetzungssteuerung einsetzen
- Alle scharfe Kanten runden, um den Effekt von Spannungssingularitäten zu begrenzen
- Mehrere Durchläufe mit zunehmend feineren Netzen durchführen, um zu prüfen, ob die Ergebnisse konvergieren oder divergieren

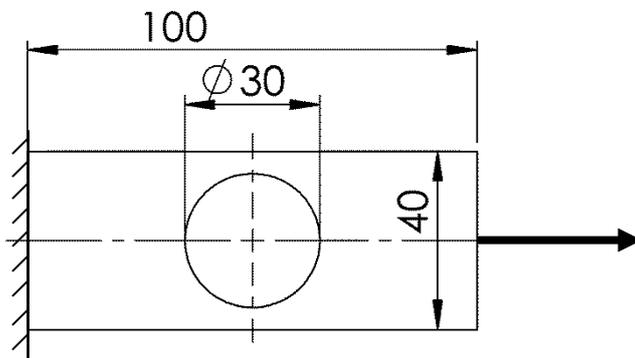
In der SolidWorks-Info findet sich folgender weiterer zu befolgender Hinweis:

„Begründen Sie Ihre Konstruktionsentscheidungen nicht ausschließlich auf Ergebnisse der Simulation. Verwenden Sie diese Informationen in Kombination mit experimentellen Daten und praktischen Erfahrungswerten. Praktische Tests sind zur Bewertung der endgültigen Konstruktion unerlässlich. Die Simulation Konstruktions-Software hilft, die Zeit zur Erlangung der Marktreife zu reduzieren, indem praktische Tests verringert aber nicht eliminiert werden.“

Wenn dies der Hersteller selber so formuliert, sollte sich der Nutzer nicht darüber hinwegsetzen.

3.2 Vernetzung mit Schalenelementen

Die Vernetzung mit Schalenelementen kommt im Besonderen bei Blechteilen zum Einsatz. Der Vorteil liegt in einer im Vergleich zu den Volumenkörpern erheblichen Verringerung der zu berechnenden Daten wegen der Gleichheit in der Geometrie und damit zu einem schnelleren zeitlichen Durchlauf im Berechnungsgang.



Hierzu wird wieder das Eingangsbeispiel genutzt (siehe Abb. 4). Zusätzlich ist eine Bohrung ergänzt worden.

Abb. 52 Bauteil mit 30mm Bohrung

Berechnung:

$$\sigma_n = \sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{10.000\text{N}}{10\text{ mm} \cdot 40\text{ mm}} = 25,0\text{ Nmm}^{-2}$$

Formzahl für Kerbwirkung

$$\alpha_k = 2,04 \quad \left(\frac{a}{b} = \frac{15\text{mm}}{20\text{mm}} = 0,75 \right)$$

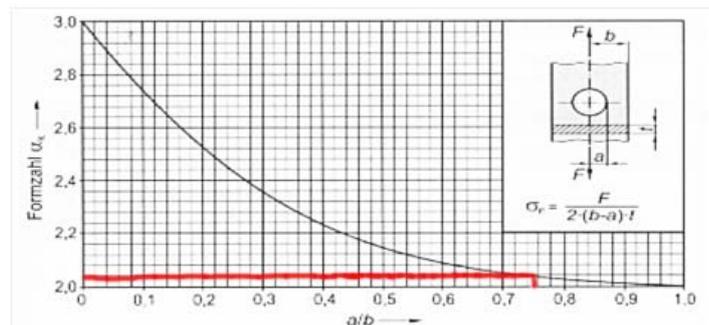


Abb. 53 Kerbwirkungsdiagramm

Quelle: Roloff/Matek Maschinenelemente; Aufl. 21

Maximalspannung mit Kerbwirkung im statischen Zustand:

$$\sigma_{\max} = \alpha_k \cdot \sigma_n = 2,04 \cdot 25,0\text{ Nmm}^{-2} = \underline{\underline{51,0\text{ Nmm}^{-2}}}$$

Im Weiteren muss aus der Modellansicht heraus eine Mittelfläche eingefügt werden (Abb. 54, 55).

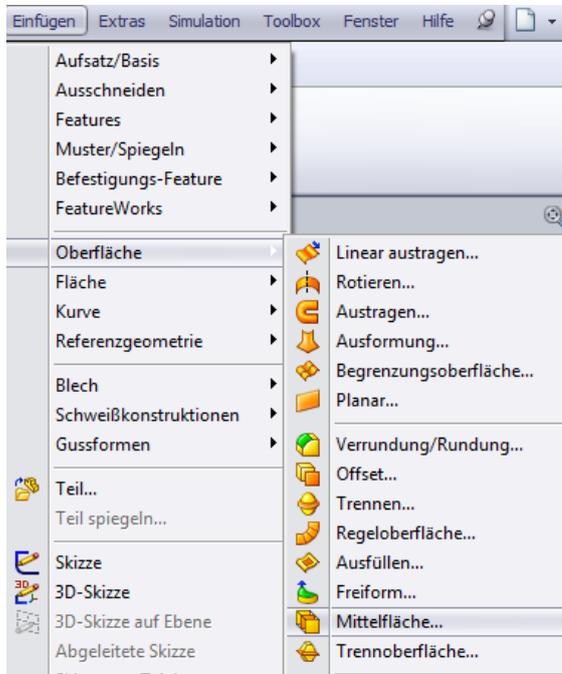


Abb. 54 Mittelfläche einfügen

Dieses geschieht durch **Einfügen | Oberfläche | Mittelfläche**. Eventuell muss diese Option über Menü anpassen der Auswahl hinzugefügt werden.

Wählen sie dann beide **Randflächen** (Abb. 56) an. Diese erscheinen als Flächenpaare im Fenster **Oberfläche-Mittelfläche** (Abb.55).

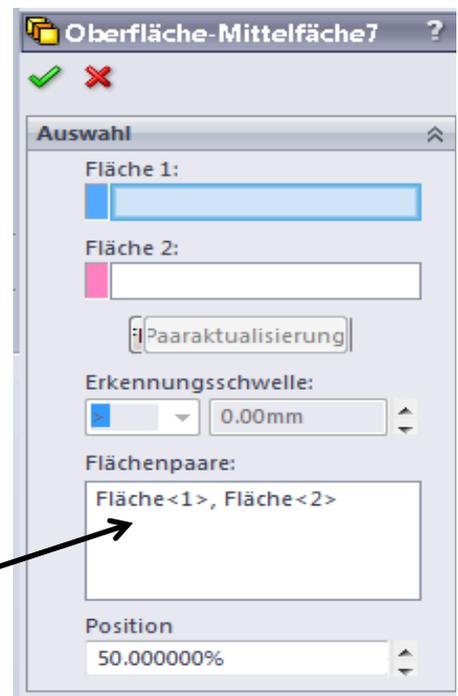


Abb. 55 Oberfläche-Mittelfläche

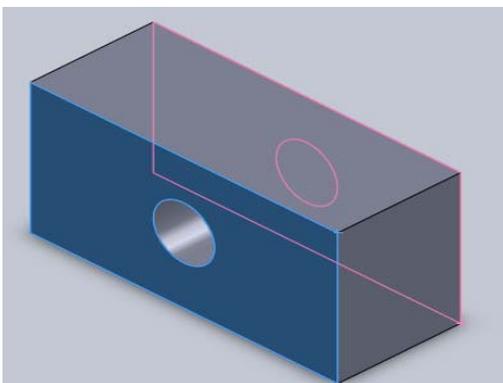
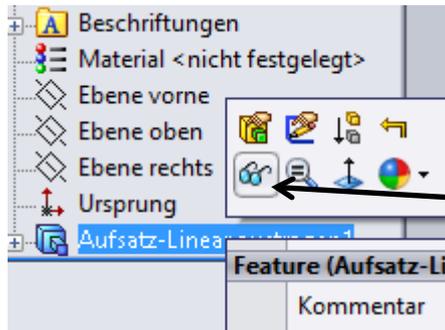


Abb. 56 Bauteil mit ausgewählter Randfläche



Wählen Sie im Feature Manager (Abb. 57) **Linear Austragen 1** an und bestätigen mit **Ausblenden**. Es ist nun nur noch die Mittelfläche zu sehen.

Abb. 57 Detailsansicht Feature Manager

1. Erstellen Sie eine neue Studie.
2. Schließen Sie den Volumenkörper aus der Studie aus (Abb 58).

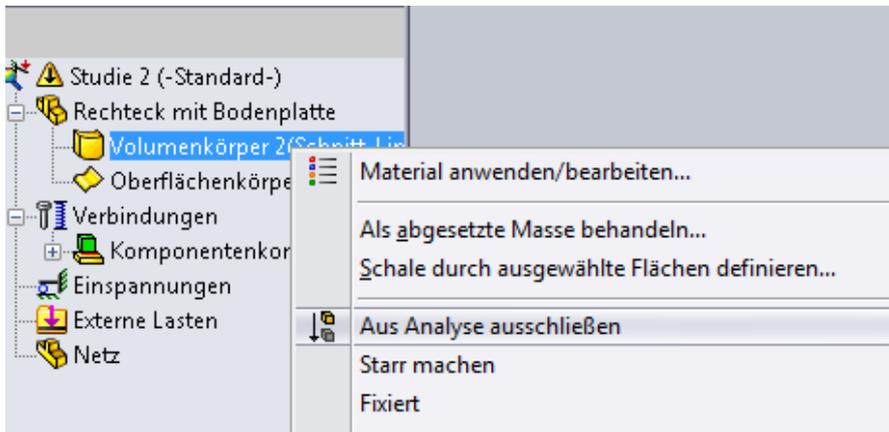


Abb. 58 Volumenkörper aus Analyse ausschließen



Abb. 59 Schalendefinition

3. Machen Sie einen Rechtsklick auf **Oberflächenkörper | Schale durch ausgewählte Flächen definieren**. Schalendefinitionen können nur vorgenommen werden, wenn es sich bei dem Bauteil um ein Blech oder eine Fläche handelt. Wenn das Höhen-Dicken Verhältnis größer 20 ist, wählt man dünn. In unserem Fall $40 \text{ mm} / 40 \text{ mm} = 1$. Also wählen Sie dick (Abb. 59). Wählen Sie die Fläche an und geben als Dicke 40 mm ein.

4. Definieren Sie auf dem Oberflächenkörper **Material (unlegierter Baustahl)**.
5. Die feste Einspannung erfolgt über die linke Kante der Schale (Abb. 60).
6. Definieren Sie die Kraft an der gegenüberliegenden Kante (blau). Wählen Sie **Ausgewählte Richtung** und wählen Sie die obere Kante (rosa). Definieren Sie die Kraft mit 10.000 N und kehren Sie die Richtung um.

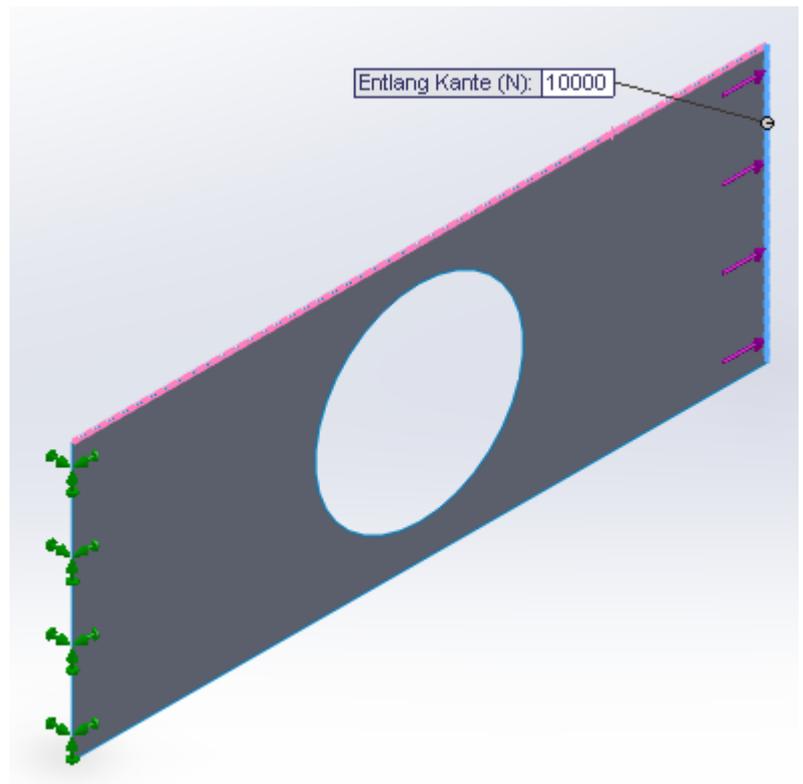
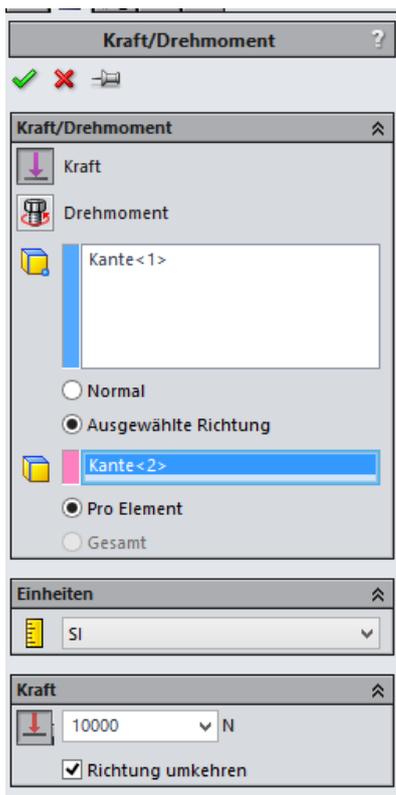


Abb. 60 Schalendefinition

7. Beim Vernetzen legen Sie die Elementgröße mit 5 mm fest. Klicken Sie ggf. auch in das darunterliegende Feld hinein zur Übernahme der Einstellung.
8. Führen Sie die Studie aus.

Die maximale Spannung beträgt $44,0 \text{ Nmm}^{-2}$ (Abb. 61). Dieser Wert weicht erheblich von der errechneten Spannung von $51,0 \text{ Nmm}^{-2}$ ab.

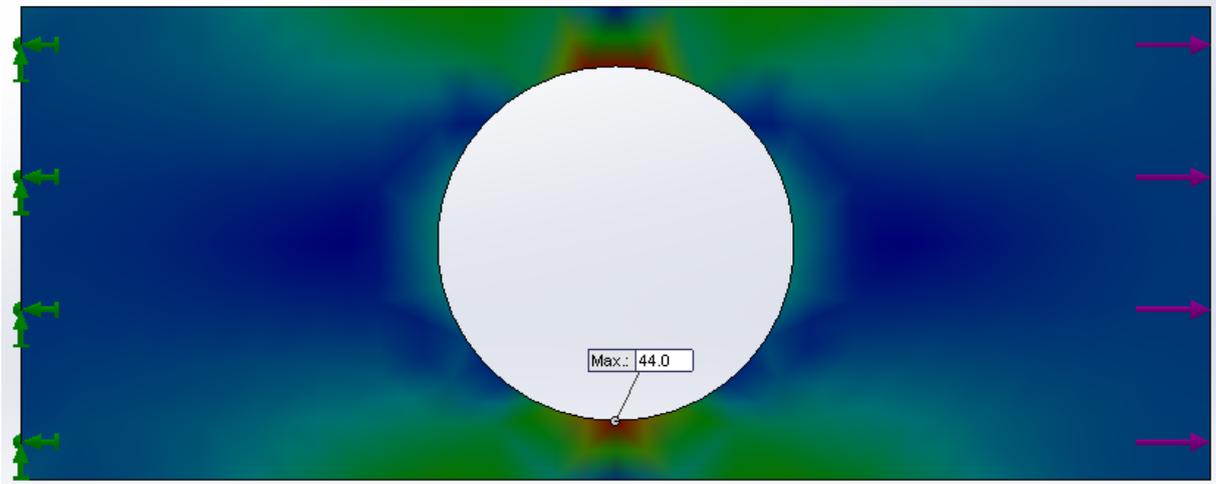


Abb. 61 Schalenanalyse mit 5 mm Vernetzung

Für eine weitere Analyse verkleinern Sie die Elementgröße auf 1 mm. Der maximale Spannungswert steigt auf $51,7 \text{ Nmm}^{-2}$.

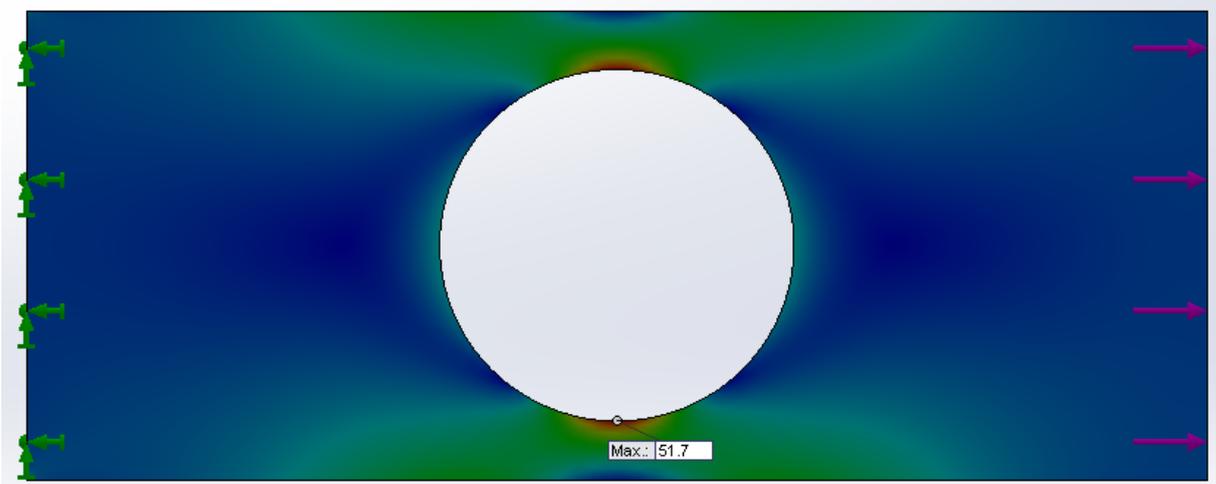


Abb. 62 Schalenanalyse mit 1 mm Vernetzung

Dieser Wert stimmt mit dem aus Handrechnung hinreichend überein. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass die Schalenvernetzung bei entsprechend gestalteten Modellen hinreichend genaue Ergebnisse liefert bei deutlich verkürztem Rechenaufwand für die FEM.

3.3 Gegenüberstellung der Vernetzungsvarianten

Zum Vergleich der Ergebnisqualitäten wird der Beispielkörper (Abb. 52) neben der Vernetzung mit Schalenelementen nachfolgend mit Netzen aus tetraedischen Volumenelementen verglichen. Öffnen Sie hierzu das Modell neu.

Erstellen Sie hierfür eine neue Studie. Definieren Sie auch hier wieder die Kraft mit 10.000 N. Das Bauteil wird an der linken Seite fixiert.

1. Erstellen Sie das Netz mit den Vorgabewerten von SolidWorks und führen Sie die Analyse durch.

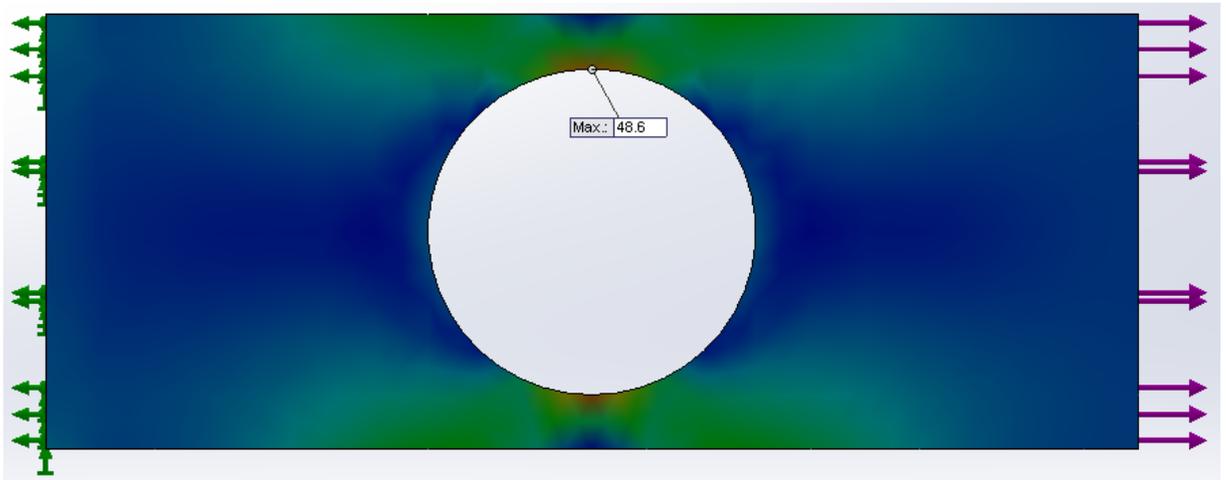


Abb. 63 Simuliertes Bauteil mit Vernetzung nach Vorgabe

Die Analyse zeigt eine maximale Von-Mises Spannung von $48,6 \text{ Nmm}^{-2}$ (Abb 63).

2. Ändern Sie nun die Netzeinstellungen (Netzparameter) auf Elementgröße 2,5 mm. Die maximale Von-Mises Spannung beträgt nun $49,8 \text{ Nmm}^{-2}$.
3. Erstellen Sie nun eine Vernetzungssteuerung in der Bohrung von 1 mm. Die Volumenelementgröße definieren Sie auf 5 mm. Die maximale Von-Mises-Spannung beträgt nun $49,5 \text{ Nmm}^{-2}$.

Berechnung– bzw. Simulationsart	Von-Mises- Spannung (Nmm ⁻²)
Handrechnung mit $\alpha_k = 2,04$	51,0 Nmm ⁻²
Schalenelement (Elementgröße 5mm)	44,0 Nmm ⁻²
Schalenelement (Elementgröße 1mm)	51,7 Nmm ⁻²
SolidWorks Voreinstellung (Elementgröße 5,7 mm)	48,6 Nmm ⁻²
Tetraedische Volumenkörperelement (Elementgröße 2,5 mm)	49,8 Nmm ⁻²
Vernetzungssteuerung 1 mm mit Volumenkörperelement (Elementgröße 5 mm)	49,5 Nmm ⁻²

Tabelle 2: Gegenüberstellung der Vernetzungsvarianten

Der Wert, der unserer Berechnung am nächsten kommt, ist der mit den Schalenelementen (51,7 Nmm⁻²). Die Abweichung des Ergebnisses mit der Vernetzungssteuerung ist aber im tolerierbaren Rahmen. Die Qualität der Ergebnisse von Berechnung als Volumenkörper oder als Schalenelement hat vor allem Begründung hinsichtlich des Rechenaufwands. Vergleichbare Berechnungen mit Schalenelementen benötigen grundsätzlich geringere Datenmengen und damit kürzere Rechenzeiten.

Abschließend betrachtet kann folgende Ergebnisprognose getroffen werden: Je feiner das Netz erstellt, desto genauer das Ergebnis, desto größer aber auch der Berechnungsaufwand. Die Vernetzungssteuerung hilft, einen sinnvollen Kompromiss zwischen Rechenaufwand und hinreichender Ergebnisgenauigkeit zu finden. In unserem Beispiel werden die Randbereiche mit Sicherheit nicht gefährdet sein – hier reicht das vergleichsweise grobe Standardnetz der Voreinstellung. Im Bereich der Bohrung ist mit Spannungsspitzen zu rechnen. Hier werden die Ergebnisse durch eine gezielte Vernetzungssteuerung hinreichend genau.

4 Grundbeanspruchungsarten

In den vorstehenden Kapiteln wurden die Grundlagen der FEM-Analyse erarbeitet und an zielführenden Beispielen mit SolidWorks-Simulation umgesetzt. Im Weiteren erfolgt die Anwendung und Vertiefung des Wissens.

FEM-Simulationen eignen sich sehr gut dazu, die Theorien der Festigkeitslehre besser zu verstehen. Bei analytischen Berechnungen (Handrechnung) wird zuerst eine Stelle im Bauteil festgelegt, wo das innere Kräftesystem und die wirkenden Spannungsarten bestimmt und berechnet werden (in der Regel beim Spannungsmaximum). Erst im Ergebnis einer FEM-Analyse sieht man aber auch den Spannungsverlauf im gesamten Bauteil, der den Kraftfluss repräsentiert.

In diesem Kapitel wird anhand von Beispielen zu den Grundbeanspruchungsarten die Anwendung von SolidWorks-Simulation geübt.

Aus der Festigkeitslehre sind die fünf Grundbeanspruchungsarten bekannt:

- Zug
- Druck
- Biegung
- Schub
- Torsion

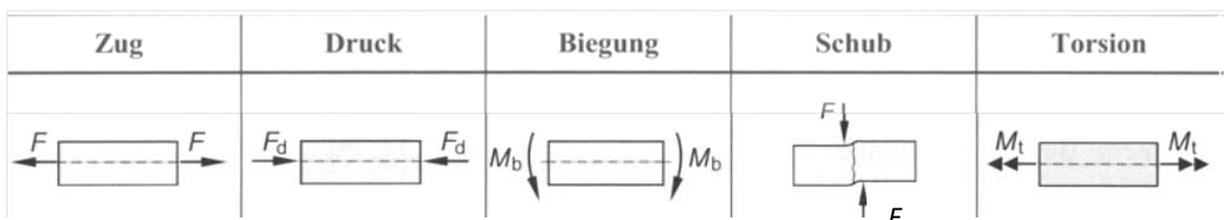


Abb. 64 Beanspruchungsarten

Nachstehend folgen FEM-Analysen zur Biege- und Torsionsspannung. Einführend werden Handrechnungen durchgeführt. Die analysierten Profile haben in allen Übungen denselben Querschnitt. Abschließend werden die Profile hinsichtlich Ihrer Eignung für die benannten Spannungsarten verglichen und beurteilt.

Beachten Sie grundsätzlich: Die von der FEM ermittelten Von-Mises-Werte berücksichtigen stets alle Spannungen. So wird eine Biegespannung immer auch von einer Schubspannung überlagert. Auch die durch das Eigengewicht verursachten Spannungen gehen stets in die Analyse ein. Zudem muss immer auch mit einer kumulierten Fehlerrate von 7-10% gerechnet werden. Auch die Feinheit des Netzes hat Einfluss auf die Ergebnisqualität.

4.1 Vollwelle auf Biegespannung

Bei der dargestellten Welle, die einseitig eingespannt ist, wird die Biegespannung ermittelt.

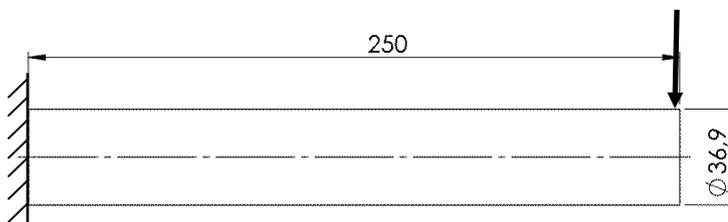


Abb. 65 Vollwelle auf Biegespannung

$$F = 10.000 \text{ N}; l = 250 \text{ mm}; D = 36,9 \text{ mm}$$

Material: S235JR (unlegierter Baustahl)

Biegespannung:

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \frac{M_b}{W_x} = \frac{F \cdot l}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} \\ &= \frac{10.000 \text{ N} \cdot 250 \text{ mm}}{\frac{\pi \cdot (36,9 \text{ mm})^3}{32}} = \underline{\underline{506,8 \text{ Nmm}^{-2}}} \end{aligned}$$

Das Ergebnis der Handrechnung wird mit denen der FEM verglichen:

1. Öffnen Sie das Modell für das Bauteil (Vollwelle).
2. Erstellen Sie eine statische Studie.
3. Bestimmen Sie das Material (unlegierter Baustahl).
4. Wählen Sie die feste Einspannung.
5. Definieren Sie die Kraft mit 10.000 N (Abb. 66).

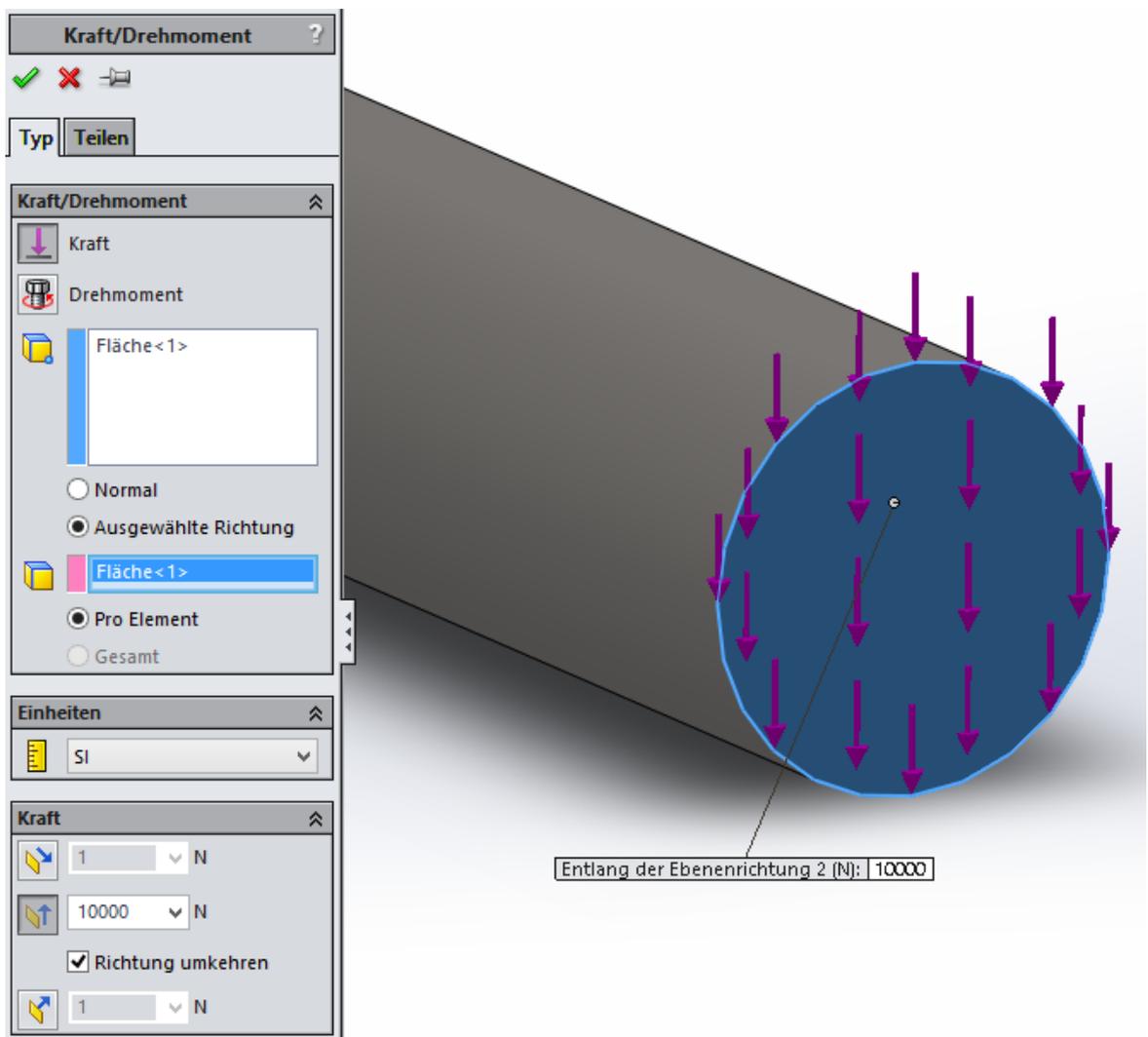


Abb. 66 Vollwelle mit Kraftfenster

- Nun vernetzen Sie das Bauteil mit der mittleren Elementgröße (Abb. 67). Die mittlere Elementgröße ist automatisch vorgegeben.

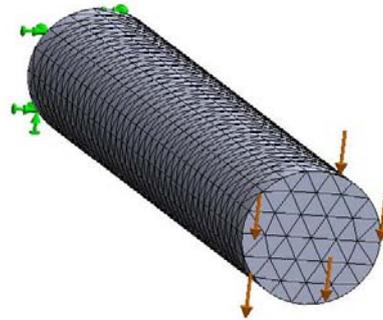


Abb. 67 Vernetzte Welle

- Führen Sie die Studie aus.

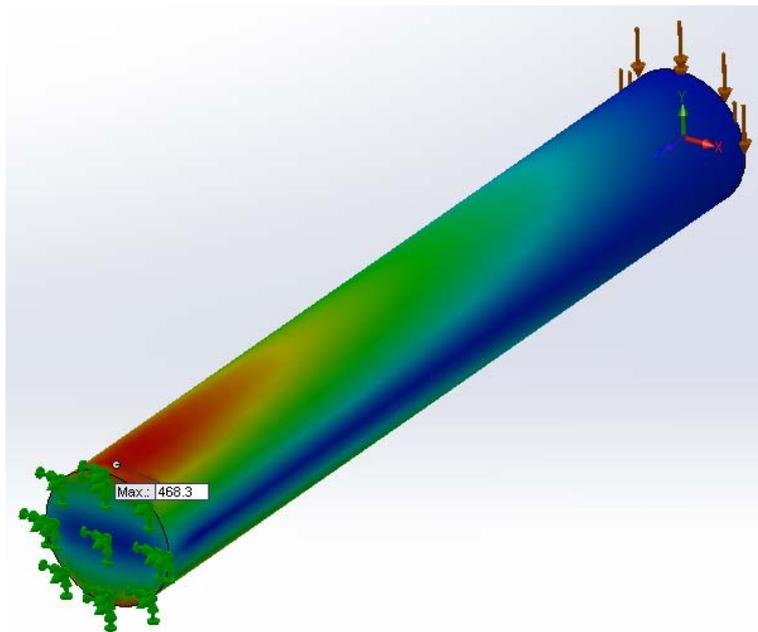


Abb. 68 Simulierte Vollwelle auf Biegung

In dieser Ansicht ist die neutrale Faser zu erkennen (Abb. 68 blauer Bereich). Dort liegt eine geringe Spannung am Werkstück an ($\rightarrow 0$). Im Randfaserbereich liegt eine maximale Von-Mises-Spannung von $468,3 \text{ Nmm}^{-2}$ an. Der simulierte Wert liegt vertretbar unter dem berechneten Wert ($506,8 \text{ Nmm}^{-2}$).

4.2 Hohlwelle auf Biegespannung

Jetzt wirkt die Einzellast auf eine Hohlwelle (Abb. 69). Wie eingangs beschrieben ist der betrachtete Querschnitt in allen Bauteilen in Kapitel 4 identisch.

$$F = 10.000 \text{ N}; l = 250 \text{ mm}$$

$$D = 47,55 \text{ mm}; d = 30 \text{ mm}$$

Material: S235JR

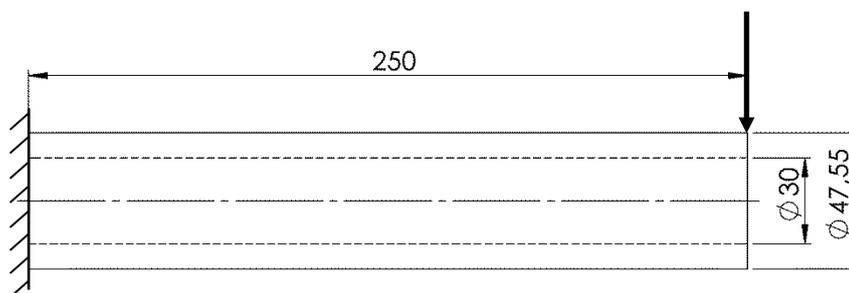


Abb. 69 2D-Zeichnung Hohlwelle

Biegespannung:

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \frac{M_b}{W_x} = \frac{F \cdot l}{\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot D}} \\ &= \frac{10.000 \text{ N} \cdot 250 \text{ mm}}{\frac{\pi \cdot ((47,55 \text{ mm})^4 - (30 \text{ mm})^4)}{32 \cdot 47,55 \text{ mm}}} = \underline{\underline{281,5 \text{ Nmm}^{-2}}} \end{aligned}$$

Nun wird das Ergebnis mit der FEM-Analyse überprüft.

1. Öffnen Sie das Modell für das Bauteil (Hohlwelle).
2. Erstellen Sie eine statische Studie.
3. Bestimmen Sie das Material (unlegierter Baustahl).
4. Wählen Sie die feste Einspannung.
5. Legen Sie die Kraft mit 10.000 N fest.
6. Vernetzen Sie das Bauteil mit 7 mm.
7. Führen Sie die Studie durch.

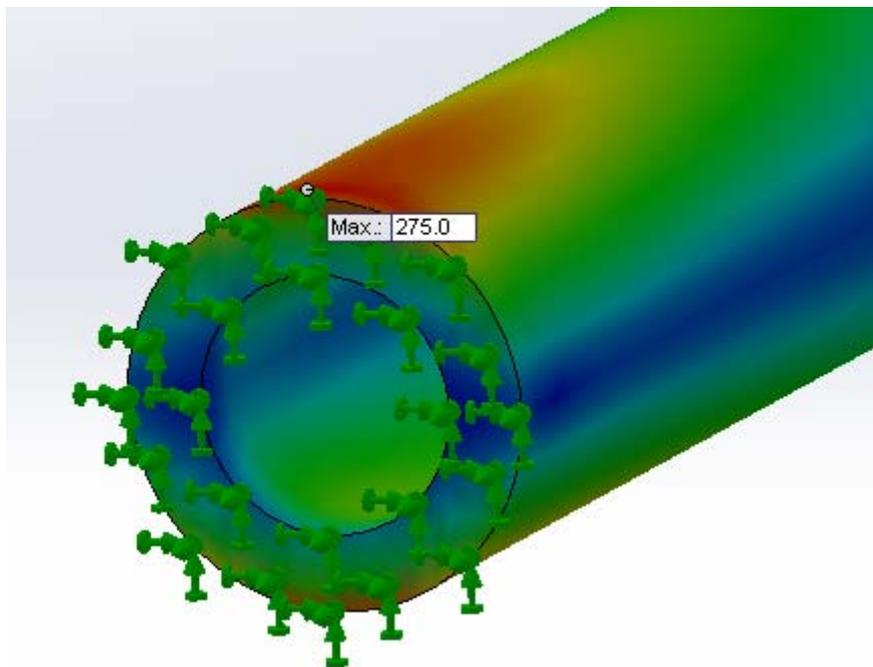


Abb. 70 Simulierte Hohlwelle

Die maximale Von-Mises-Spannung beträgt $275,0 \text{ Nmm}^{-2}$ (Abb. 70). Dieser Wert kommt dem errechneten Wert sehr nahe.

4.3 I-Träger auf Biegespannung

Bei dem dargestellten I-Profil DIN 1025-S235JR-I100, der einseitig eingespannt ist, werden nun die auftretenden Biegespannungen berechnet.

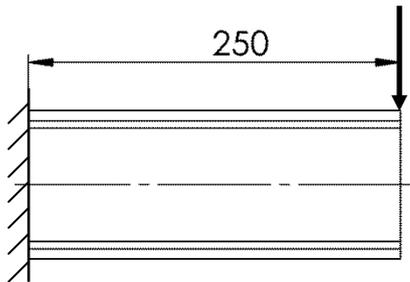


Abb. 71 Belasteter I-Träger

Gegebene Werte:

$$F = 10.000 \text{ N}; W_x = 34.200 \text{ mm}^3 \text{ (vgl. R/M TB 1-11)}$$

Material: S235JR

Biegespannung:

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \frac{M_b}{W_x} = \frac{F \cdot l}{W_x} \\ &= \frac{10.000 \text{ N} \cdot 250 \text{ mm}}{34.200 \text{ mm}^3} = \underline{\underline{73,1 \text{ Nmm}^{-2}}} \end{aligned}$$

Nun wird das Ergebnis mit der FEM-Analyse überprüft.

1. Öffnen Sie das Modell für das Bauteil (I-Träger).
2. Erstellen Sie eine statische Studie.
3. Bestimmen Sie das Material (unlegierter Baustahl).
4. Wählen Sie die feste Einspannung.
5. Definieren Sie die Kraft.
6. Nun vernetzen Sie das Bauteil mit der mittleren Elementgröße

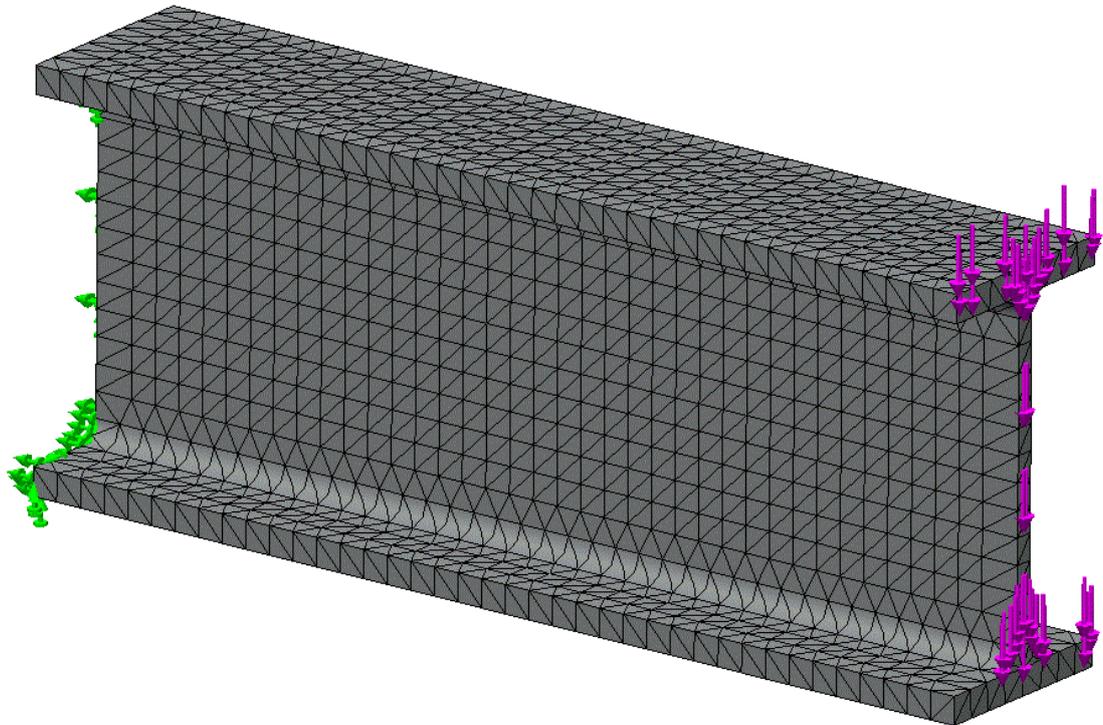


Abb. 72 Netzdarstellung

7. Wählen Sie nun den Button **Ausführen** an, und führen Sie die Studie aus.

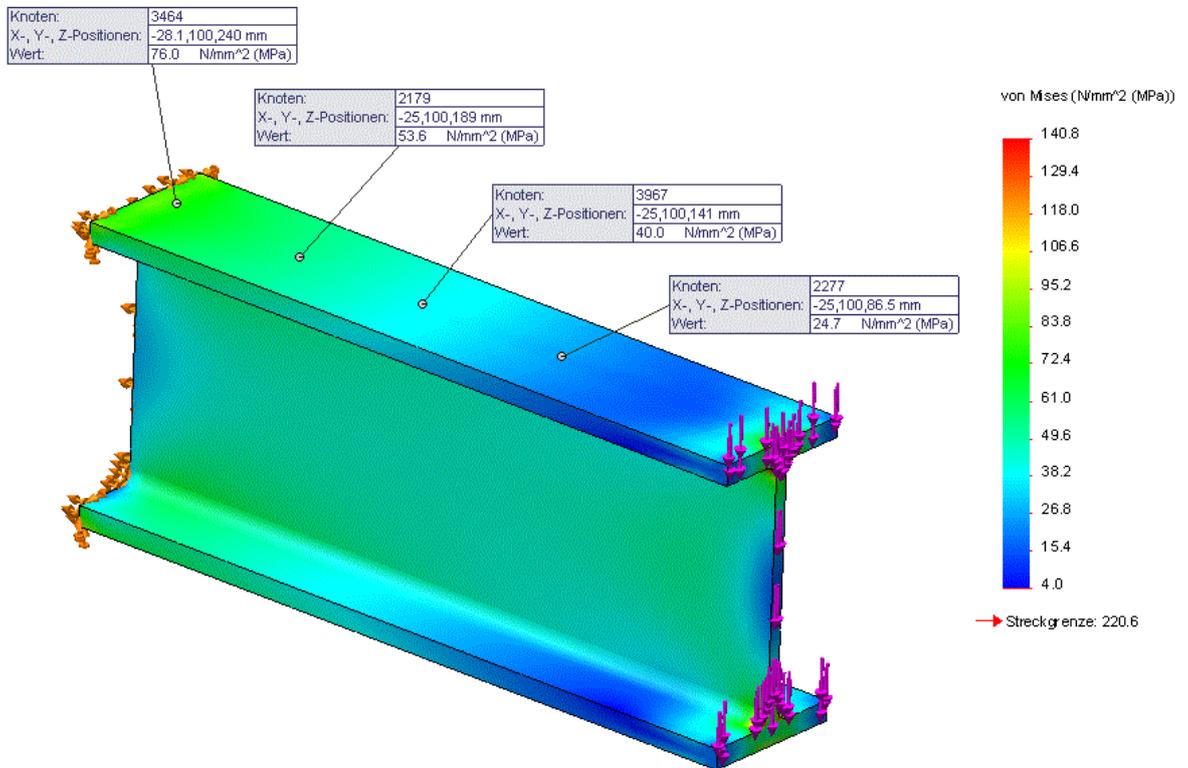


Abb. 73 Simulierter I-Träger

Mittels Sondierung werden in diesem Beispiel verschiedene Messpunkte aufgenommen:

$$76,0 \text{ Nmm}^{-2} - 53,6 \text{ Nmm}^{-2} - 40,0 \text{ Nmm}^{-2} - 24,7 \text{ Nmm}^{-2}$$

Das Ergebnis der linken Sondierung kommt der Handberechnung akzeptabel nahe ($73,1 \text{ Nmm}^{-2}$). Eine Netzverfeinerung würde bei gleichem Randabstand noch geringere Werte liefern und sich der Handrechnung weiter annähern.

Wegen der linearen Zunahme der Spannung vom linken sondierten Punkt aus wird der maximale Spannungswert kaum darüber liegen. Der gemessene Knotenpunkt auf der Ecke wird aber weit höhere Werte liefern, was auf Spannungssingularitäten zurückzuführen ist und deshalb unberücksichtigt bleiben kann. Gleiches gilt für den vorderen Bereich des Trägers mit einer vermeintlichen Spannungsspitze von $140,8 \text{ Nmm}^{-2}$.

4.4 Vollwelle auf Torsionsspannung

Die dargestellte einseitig eingespannte Vollwelle wird mit $T = 2.500 \text{ Nm}$ auf Torsion belastet (Abb. 74).

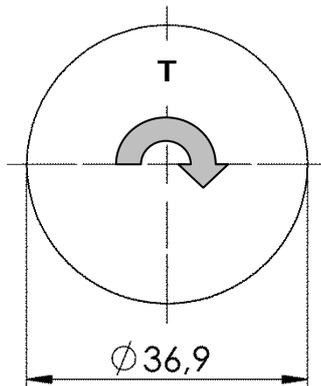


Abb. 74 Welle auf Torsion beansprucht

Gegebene Werte:

$T = 2500 \text{ Nm}$; $d = 36,9 \text{ mm}$

Material: S235JR

Torsionsspannung:

$$\begin{aligned} \tau_t &= \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} \\ &= \frac{2,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{\frac{\pi \cdot (36,9 \text{ mm})^3}{16}} = \underline{\underline{253,4 \text{ Nmm}^{-2}}} \end{aligned}$$

Wenn die obige Torsionsspannung mit der Festigkeitshypothese von Von-Mises mit $\sigma_b = 0 \text{ Nmm}^{-2}$ umgerechnet wird, erhält man:

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2} \\ &= \sqrt{(0 \text{ Nmm}^{-2})^2 + 3 \cdot (253,4 \text{ Nmm}^{-2})^2} = \underline{\underline{438,9 \text{ Nmm}^{-2}}} \end{aligned}$$

Nun wird das Ergebnis mit der FEM-Analyse überprüft.

1. Öffnen Sie das Bauteil (Vollwelle).
2. Erstellen Sie eine statische Studie.
3. Bestimmen Sie nun das entsprechende Material (unlegierter Baustahl).
4. Wählen Sie die feste Einspannung.
5. Definieren Sie das Drehmoment mit 2.500 Nm über die Rotationsachse (Abb. 75).

Hinweis: Für die Definition einer Rotationsachse müssen Sie ggf. über **Einfügen | Referenzgeometrie | Achse** eine Referenzachse definieren. Dies gilt im Besonderen bei nicht-rotationssymmetrischen Bauteilen.

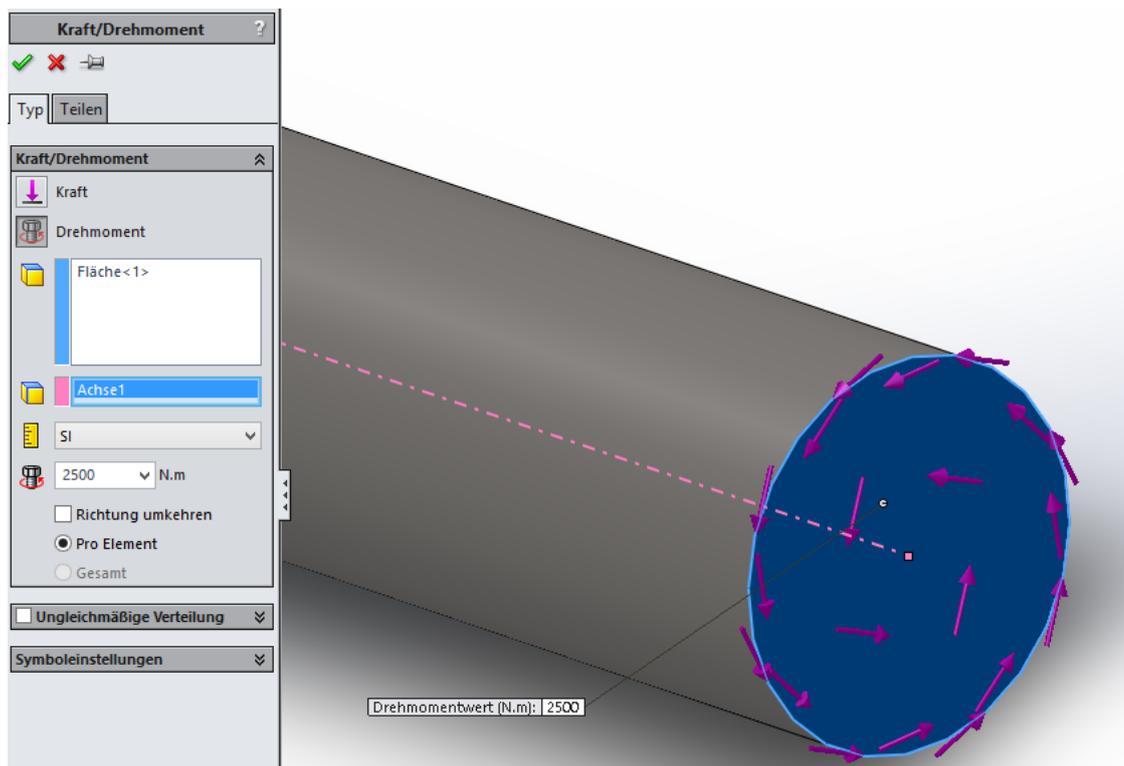


Abb. 75 Welle mit Kraftfenster-Torsion

6. Vernetzen Sie nun das Bauteil mit der Voreinstellung (Abb. 76).

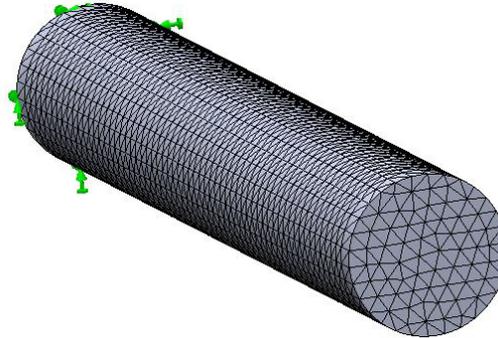


Abb. 76 Vernetzte Welle

7. Drücken Sie nun den Button **Ausführen**. Die Studie wird ausgeführt.

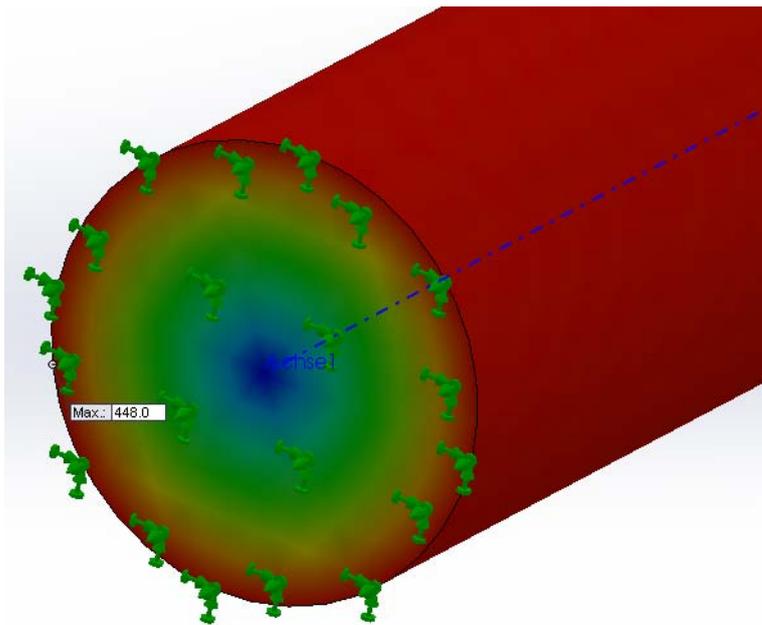


Abb. 77 Sondierungsfenster mit simulierter Welle

Die maximale Von-Mises-Spannung beträgt $448,0 \text{ Nmm}^{-2}$ (Abb. 77) und liegt in akzeptabler Nähe zur Handrechnung ($438,9 \text{ Nmm}^{-2}$). In der Abbildung lässt sich gut erkennen, dass die Spannungsverteilung zum Nullpunkt hin gegen Null tendiert.

4.5 Hohlwelle auf Torsionsspannung

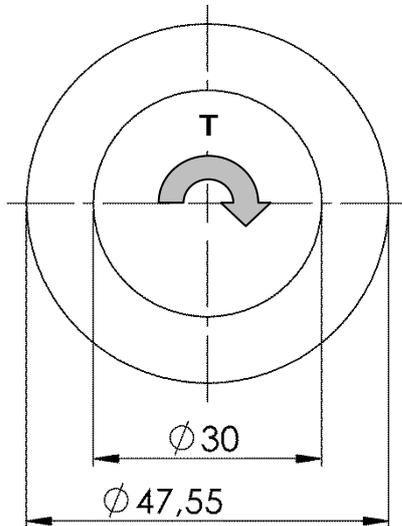


Abb. 78 2D-Zeichnung Hohlwelle

$T = 2.500 \text{ Nm}$; $D = 47,55 \text{ mm}$; $d = 30 \text{ mm}$

Material= S235JR

Torsionsspannung:

$$\begin{aligned} \tau_t &= \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D}} \\ &= \frac{2,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{\frac{\pi \cdot ((47,55 \text{ mm})^4 - (30 \text{ mm})^4)}{16 \cdot 47,55 \text{ mm}}} = \underline{\underline{140,7 \text{ Nmm}^{-2}}} \end{aligned}$$

Umrechnung der Torsionsspannung in die Von-Mises-Spannung:

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2} \\ &= \sqrt{(0 \text{ Nmm}^{-2})^2 + 3 \cdot (140,7 \text{ Nmm}^{-2})^2} = \underline{\underline{234,7 \text{ Nmm}^{-2}}} \end{aligned}$$

Nun wird das Ergebnis mit der FEM-Analyse überprüft.

1. Öffnen Sie das Modell für das Bauteil (Hohlwelle).
2. Erstellen Sie eine statische Studie.
3. Bestimmen Sie das Material (unlegierter Baustahl).
4. Wählen Sie die feste Einspannung.
5. Definieren Sie das Drehmoment mit 2.500 Nm über die Rotationsachse.
6. Nun vernetzen Sie das Bauteil mit der Voreinstellung.
7. Wählen Sie nun den Button **Ausführen** an und führen Sie die Studie aus.

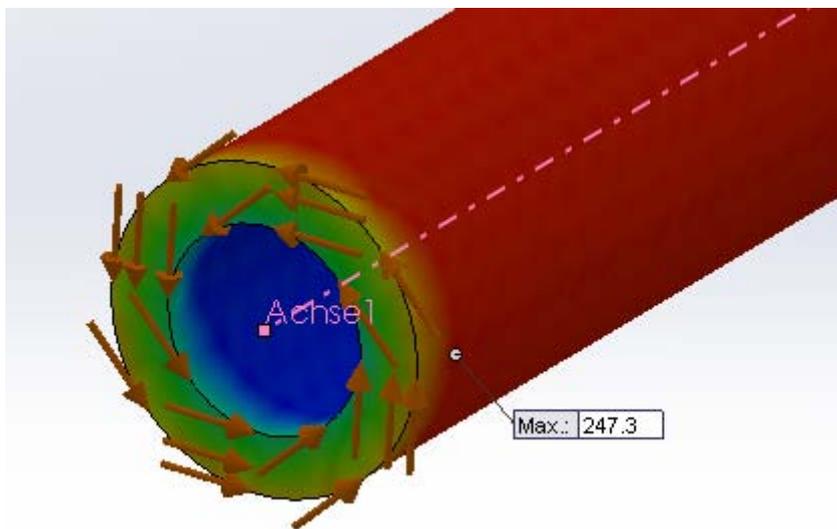


Abb. 79 Simulierte Welle auf Torsion beansprucht

Der simulierte Wert (Abb. 79) mit der maximalen Von-Mises-Spannung von $247,3 \text{ Nmm}^{-2}$ kommt dem in der Handrechnung ermittelten Wert akzeptabel nahe ($234,7 \text{ Nmm}^{-2}$).

4.6 I-Trägers auf Torsionsspannung

Der I-Träger wird ohne vorhergehende Handrechnung simuliert. Für die meisten nicht-rotationssymmetrischen Profile stehen keine Berechnungsgleichungen für das polare Widerstandsmoment zur Verfügung. Wenn überhaupt können diese nur als Annäherung mit aufwändigen Methoden der höheren Mathematik ermittelt werden.

1. Öffnen Sie das Modell für das Bauteil (I-Träger mit Rotationsachse).
2. Erstellen Sie eine statische Studie.
3. Bestimmen Sie das Material (unlegierter Baustahl).
4. Wählen Sie die feste Einspannung.
5. Definieren Sie das Drehmoment mit 2.500 Nm (Abb. 80). Als Fläche wählen Sie die vordere und als Achse die Rotationsachse.

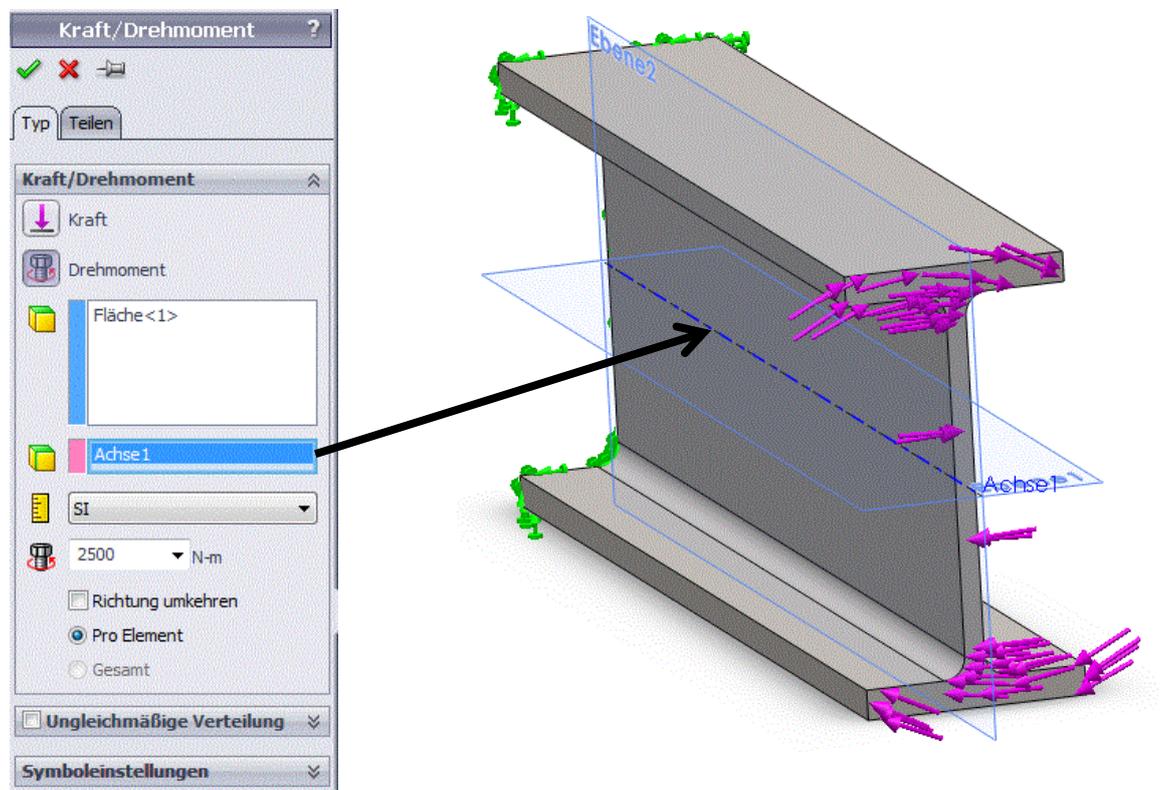


Abb. 80 I-Träger auf Torsion beansprucht

6. Vernetzen Sie das Bauteil mit einer mittleren Elementgröße gemäß Voreinstellung.
7. Wählen Sie nun den Button **Ausführen** an und führen Sie die Studie aus (Abb. 81).

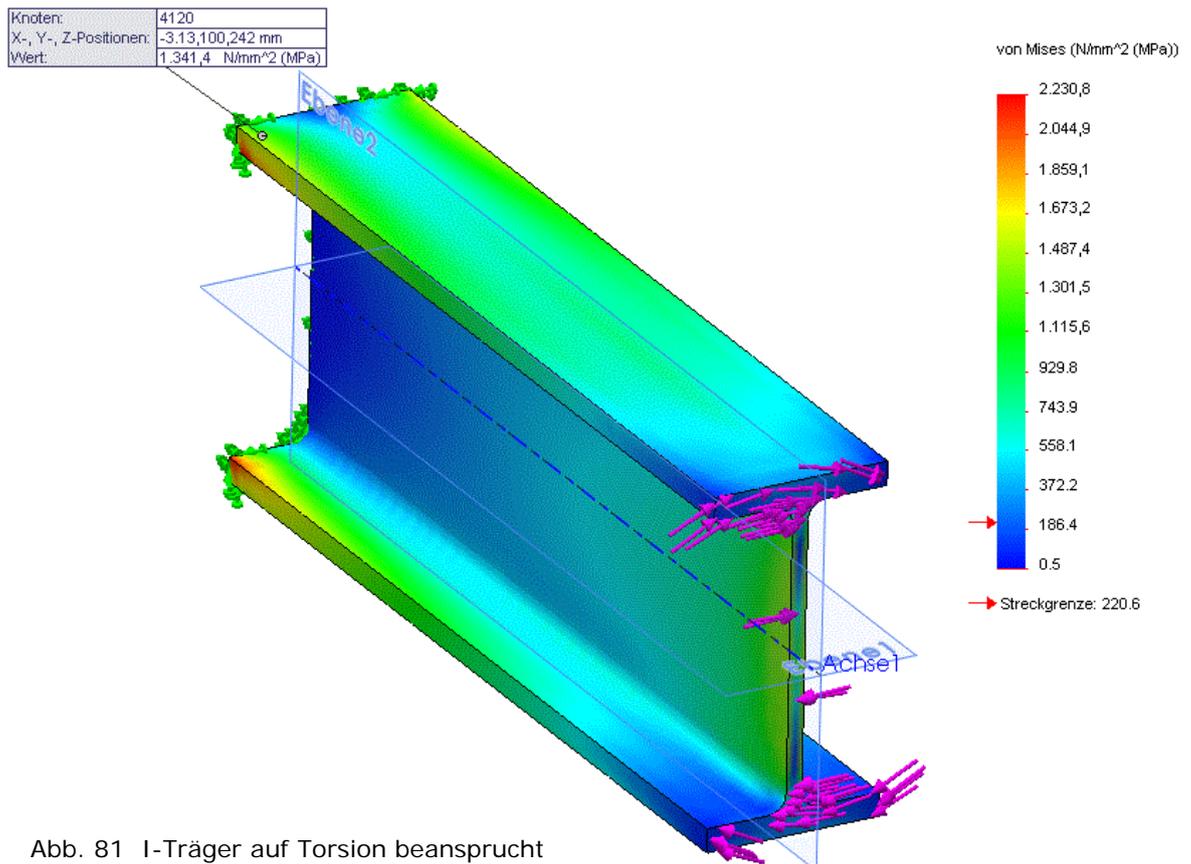


Abb. 81 I-Träger auf Torsion beansprucht

Die in der Skala ausgewiesene Spannungsspitze von $2.230,8 \text{ Nmm}^{-2}$ tritt an den Kanten auf und ist auf Spannungssingularitäten zurückzuführen. Eine exakte Sondierung des tatsächlich vorhandenen maximalen Spannungswertes ist kaum möglich. Dies hängt auch mit der ungeeigneten offenen Profilform für Torsion zusammen. Ein nicht-rotationssymmetrischer Körper verdreht sich auch nicht im herkömmlichen Sinn – er verdrillt, da er keine eigentliche Rotationsachse hat. Für die Analyse musste daher auch im Vorfeld für die Durchführung der Analyse eine Referenzachse (Achse 1) eingebracht werden.

4.7 Abschlussbetrachtung

Die maximale Von-Mises-Spannung beträgt $2.206,7 \text{ Nmm}^{-2}$ (mit Spannungssingularität!) und liegt damit weit über der Streckgrenze. An diesem Beispiel lässt sich gut veranschaulichen, dass auf Torsion beanspruchte Bauteile grundsätzlich geschlossen sein sollten und zudem vorzugsweise rotations-symmetrisch.

Nachfolgend werden die Belastungsarten Torsion und Biegung bezogen auf die bei gleichem Querschnitt auftretenden Spannungen aufgelistet:

Bauteil	Torsionsspannung (Nmm^{-2})	Biegespannung (Nmm^{-2})
Vollwelle	448,0	468,3
Hohlwelle	247,3	275,0
I-Träger	2.230,8	76,0

Tabelle 3: Gegenüberstellung der Spannungen bezogen auf das belastete Profil

Abschließend kann festgehalten werden, dass bei einem gleichbleibenden Querschnitt der I-Trägers die Biegespannung am besten aufnehmen kann aber besonders anfällig auf Torsion reagiert und für solche Zwecke als offenes Profil höchst ungeeignet ist. Die Hohlwelle zeigt hinsichtlich beider Spannungsarten den besten Kompromiss, ist ggf. aber fertigungstechnisch am teuersten, wenn maßlich keine Normrohre zur Verfügung stehen.

Die spannungstheoretischen Erkenntnisse im Einzelnen:

- Sowohl bei Biegung als auch bei Torsion die tragenden Flächen soweit wie möglich von der Biegeachse (Biegung) bzw. Rotationsachse (Torsion) einsetzen
- Bei Torsion grundsätzlich offene Profile vermeiden

Nachfolgend ist eine vergleichende Darstellung von Profilen hinsichtlich des Vermögens der Kompensation von Biegespannungen aufgeführt. Der Flächenquerschnitt ist jeweils identisch.

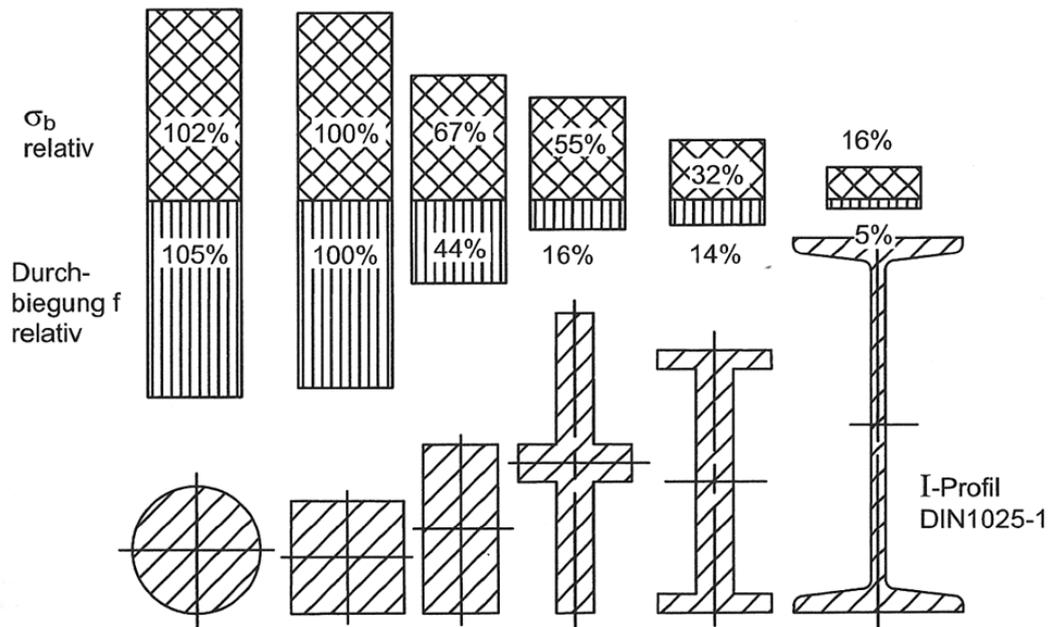


Abb. 82 Profilvergleich auf Biegespannung
Quelle: Hoenow: Entwerfen und Gestalten im Maschinenbau; Fachbuchverlag Leipzig

Eine weitere vergleichende Darstellung hinsichtlich Torsion findet sich nachfolgend.

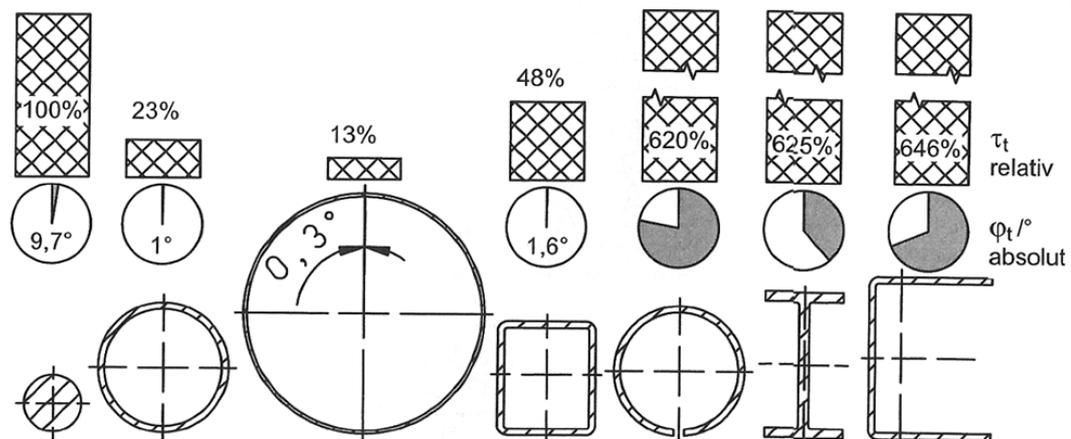


Abb. 83 Profilvergleich auf Torsionsspannung
Quelle: Hoenow, G.: Entwerfen und Gestalten im Maschinenbau; Fachbuchverlag Leipzig

Zusammenfassend finden sich nachfolgend grundsätzliche Hinweise für die Profilwahl auf der Grundlage der zu berücksichtigenden Beanspruchungsart.

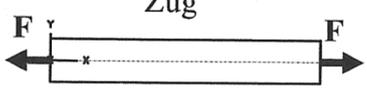
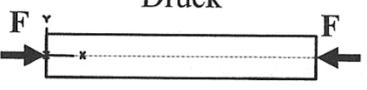
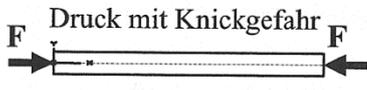
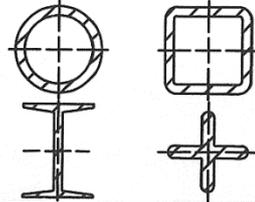
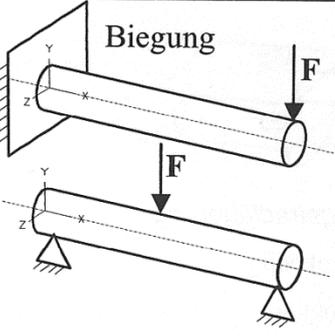
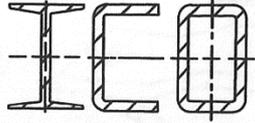
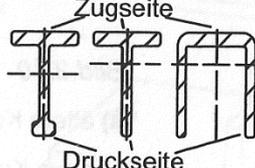
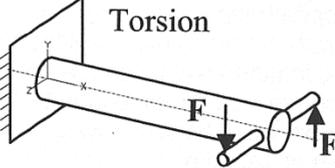
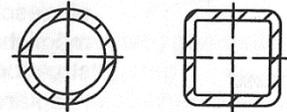
Beanspruchungsart	geeignete Profile	Bemerkungen
<p>Zug</p> 	<p>beliebig</p> <p>Auf billige Halbzeuge zurückgreifen!</p>	<p>Querschnitt beliebig wählbar, da nur beanspruchte Flächen-größe und Werkstoff von Bedeutung sind.</p>
<p>Druck</p> 	<p>beliebig,</p> <p> ist aber schlecht</p>	<p>Länge der Bauteile im Vergleich zum Querschnitt sollte klein bleiben – Knickgefahr!</p>
<p>Druck mit Knickgefahr</p> 		<p>Bei langen schlanken Bauteilen ist der Nachweis der Sicherheit gegen Knicken zu führen!</p>
<p>Biegung</p> 	 <p>zäh (duktil) z. B. Stahl</p> <p>Zugseite</p>  <p>Druckseite</p> <p>spröde z. B. Gusseisen</p> <p> ist ungünstig!</p>	<p>Nach Möglichkeit solche Profile verwenden, die weit von der neutralen Faser entfernt Material aufweisen. Für Gusswerkstoffe mehr Material auf der Zugseite anordnen!</p>
<p>Torsion</p> 		<p>Bei Torsion geschlossene Hohlprofile verwenden!</p> <p>I ist ungünstig!</p>

Tabelle 4: Profilvergleich auf Torsionsspannung

Quelle: Hoenow, G.: Entwerfen und Gestalten im Maschinenbau; Fachbuchverlag Leipzig

5 Kerbwirkung

5.1 Begriff Kerbwirkung

Kerben führen in Bauteilen zu örtlichen Spannungsspitzen (vgl. Abb. 84) und sind dadurch oft Ausgangspunkt für ein Bauteilversagen. Grund hierfür ist die Verdichtung im Kraftfluss. Jede Umleitung im Kraftfluss ist somit mit einer örtlichen Spannungsspitze verbunden. Allerdings kann auf Kerben nicht grundsätzlich verzichtet werden, weil sie beispielsweise als Achsübergänge oder Passfedernuten konstruktive Funktionen erfüllen.

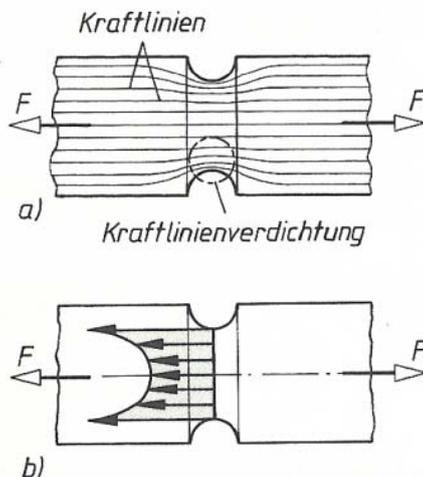


Abb. 84 Kraftfluss und Spannungsverteilung an einer Kerbe
Quelle: Roloff/Matek; vgl. Anhang

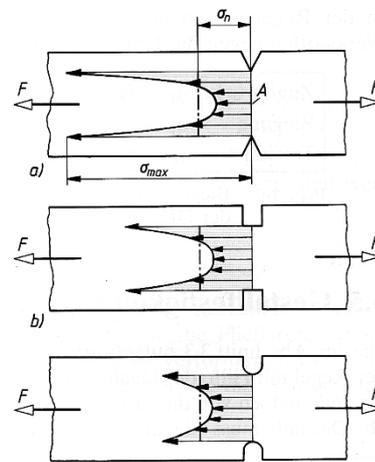


Abb. 85 Einfluss der Kerbform auf die Spannungsspitze
Quelle: Roloff/Matek; vgl. Anhang

Die festigkeitsmindernde Wirkung einer Kerbe wird in erster Linie von der Kerbform beeinflusst. Je schärfer einer Kerbe ist, desto höher ist die auftretende Maximalspannung σ_{max} im Vergleich zur Nennspannung σ_n (vgl. Abb. 85). Die Kerbformzahl definiert sich entsprechend aus:

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$

Grundsätzlich lässt sich definieren: Mit zunehmender Kerbschärfe steigt die Kerbformzahl und damit die Maximalspannung. Unter Berücksichtigung von Stützwirkungen können aus den Kerbformzahlen für die statische Untersuchung die Kerbwirkungszahlen β_k für dynamische Untersuchungen abgeleitet werden; dabei gilt allgemein: $\alpha_k > \beta_k$.

5.2 Untersuchungsgegenstände

Nachfolgend werden Flachstäbe vergleichend untersucht. Folgende Aspekte werden hinsichtlich ihrer Bedeutung für die Kerbwirkungszahl untersucht:

- Abstufung der Bauteildicke
- Größe Übergangsradius
- Harmonisierung Übergang

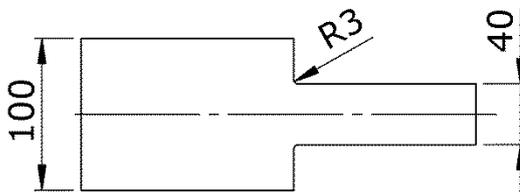


Abb. 86 Profilsprung 100-40 mit R3

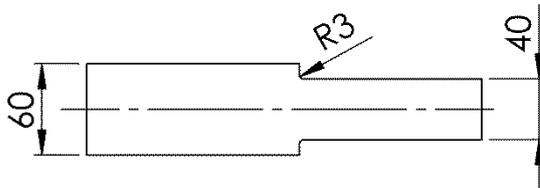


Abb. 87 Profilsprung 60-40 mit R3

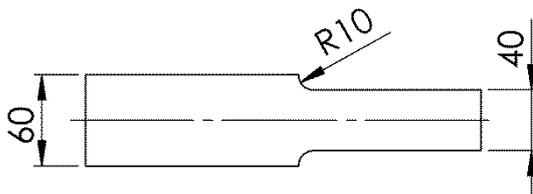


Abb. 88 Profilsprung 60-40 mit R10

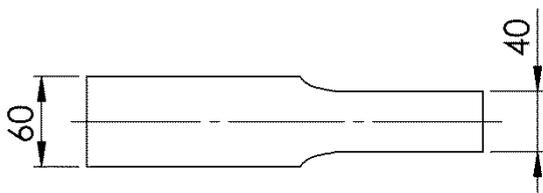


Abb. 89 Profilsprung 60-40 mit
Übergangskontur als Zugdreieck
vgl. Literaturquelle: Mattheck

5.3 Handrechnungen

Im Weiteren werden für die vorangestellten Flachstähle die maximalen Spannungen per Handrechnung für die Abbildungen 86, 87, 88 ermittelt. Für die Abbildung 89 fehlen Tabellen für die Abschätzung der Kerbwirkungszahl. Die Analyse erfolgt hier ausschließlich über die FEM.

Für alle Aufgaben gelten folgende Annahmen:

$F = 40 \text{ kN}$; Bauteildicke $t = 20 \text{ mm}$

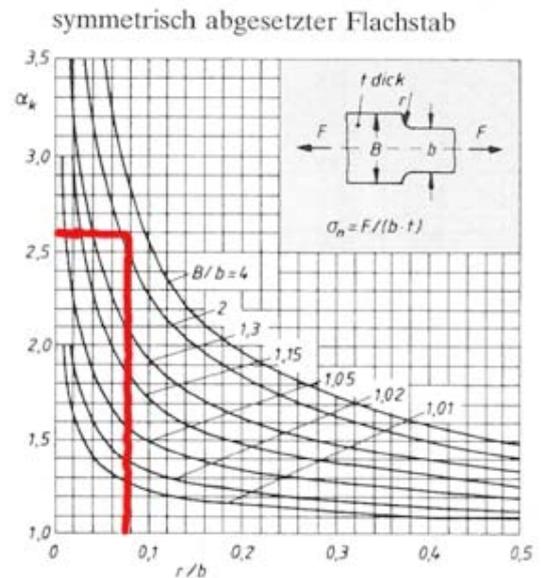
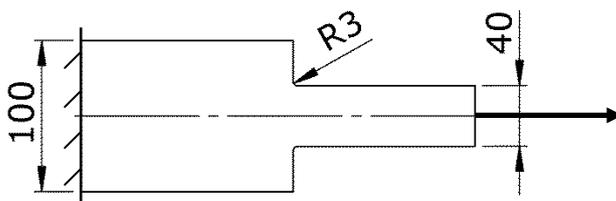


Abb. 90 Profilsprung 100-40 mit R3 mit zugehöriger Kerbwirkungstabelle
Quelle Tabelle: Roloff/Matek; vgl. Anhang

$$\sigma_n = \sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{40.000 \text{ N}}{20 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm}} = 50,0 \text{ Nmm}^{-2}$$

Formelzahl für Kerbwirkung: $\alpha_k = 2,6$

$$\left(\frac{B}{b} = \frac{100 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 2,5 \quad \frac{r}{b} = \frac{3 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 0,075 \right)$$

Maximalspannung mit Kerbwirkung im statischen Zustand:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \alpha_k \cdot \sigma_n \\ &= 2,6 \cdot 50,0 \text{ Nmm}^{-2} = \underline{\underline{130,0 \text{ Nmm}^{-2}}} \end{aligned}$$

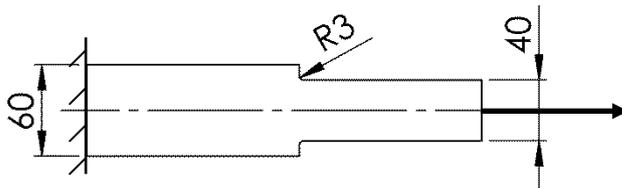
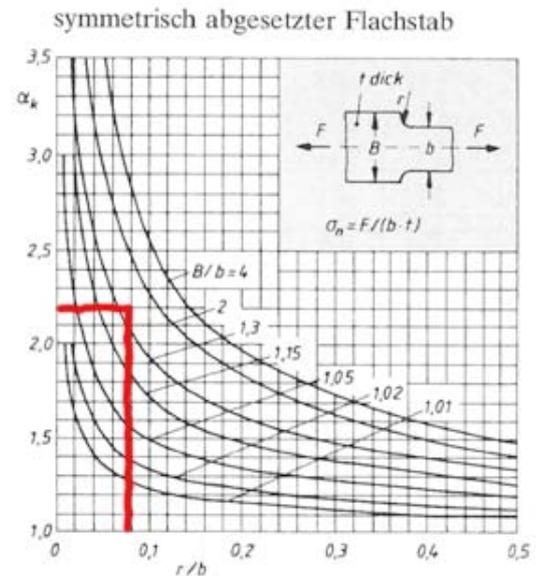


Abb. 91 Profilsprung 60-40 mit R3 mit zugehöriger Kerbwirkungstabelle
Quelle Tabelle: Roloff/Matek; vgl. Anhang

Formelzahl für Kerbwirkung: $\alpha_k = 2,2$

$$\left(\frac{B}{b} = \frac{60\text{mm}}{40\text{mm}} = 1,5 \quad \frac{r}{b} = \frac{3\text{mm}}{40\text{mm}} = 0,075 \right)$$



Maximalspannung mit Kerbwirkung im statischen Zustand:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \alpha_k \cdot \sigma_n \\ &= 2,2 \cdot 50,0 \text{ Nmm}^{-2} = \underline{\underline{110,0 \text{ Nmm}^{-2}}} \end{aligned}$$

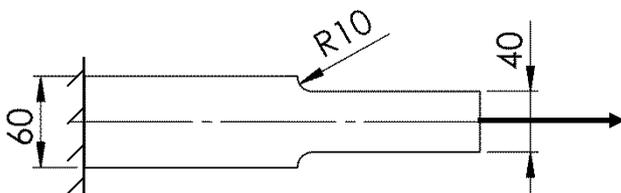
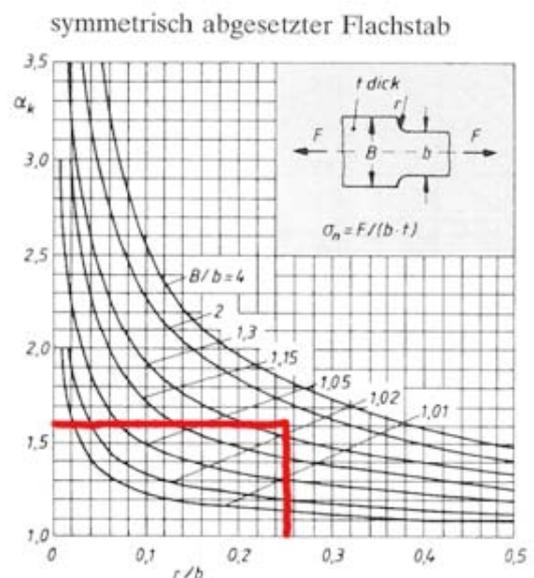


Abb. 92 Profilsprung 60-40 mit R10 mit zugehöriger Kerbwirkungstabelle
Quelle Tabelle: Roloff/Matek; vgl. Anhang

Formelzahl für Kerbwirkung: $\alpha_k = 1,6$

$$\left(\frac{B}{b} = \frac{60\text{mm}}{40\text{mm}} = 1,5 \quad \frac{r}{b} = \frac{10\text{mm}}{40\text{mm}} = 0,25 \right)$$



Maximalspannung mit Kerbwirkung im statischen Zustand:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \alpha_k \cdot \sigma_n \\ &= 1,6 \cdot 50,0 \text{ Nmm}^{-2} = \underline{\underline{80,0 \text{ Nmm}^{-2}}} \end{aligned}$$

5.4 FEM-Analysen

Grundsätzlich eignet sich für die Analyse die Auswahl der Schalenelemente als Netztyp. Da die meisten zu untersuchen Geometrien aber eher unregelmäßigen Charakter haben, werden die nachfolgenden Untersuchungen aus Übungszwecken mit den voreingestellten tetraedischen Volumenkörpern durchgeführt.

Führen Sie für die aufgeführten Profile die Analysen durch unter folgenden Rahmenbedingungen:

Kraftangriff: $F = 40 \text{ kN}$; Material: unlegierter Baustahl

Für die Analyse verwenden Sie für die Vernetzung die Voreinstellung. Für den Bereich im Radius wählen Sie eine Vernetzungssteuerung mit 1 mm.

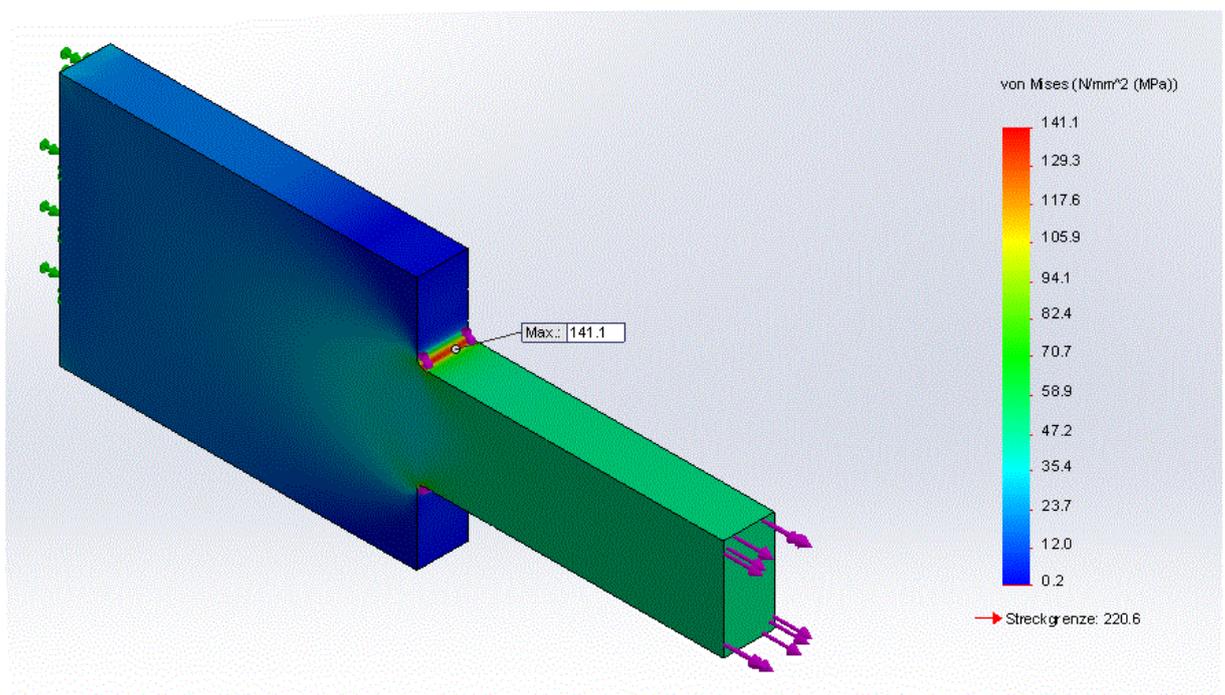


Abb. 93 Profilsprung 100-40 mit R3

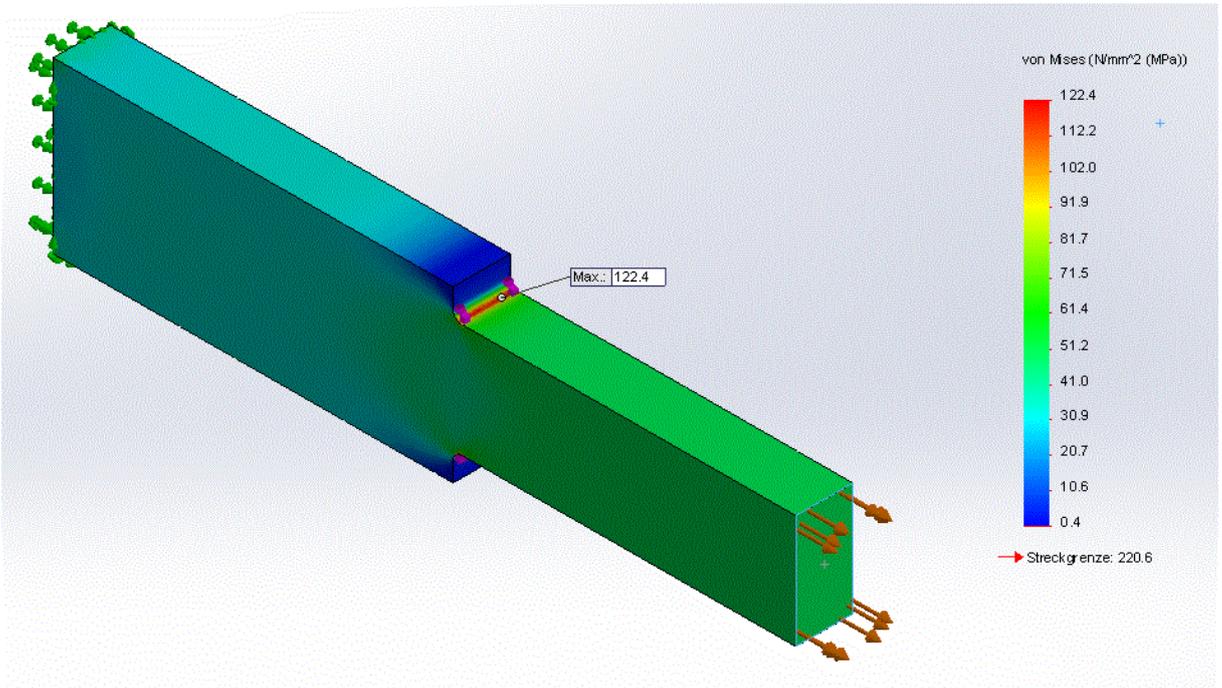


Abb. 94 Profilsprung 60-40 mit R3

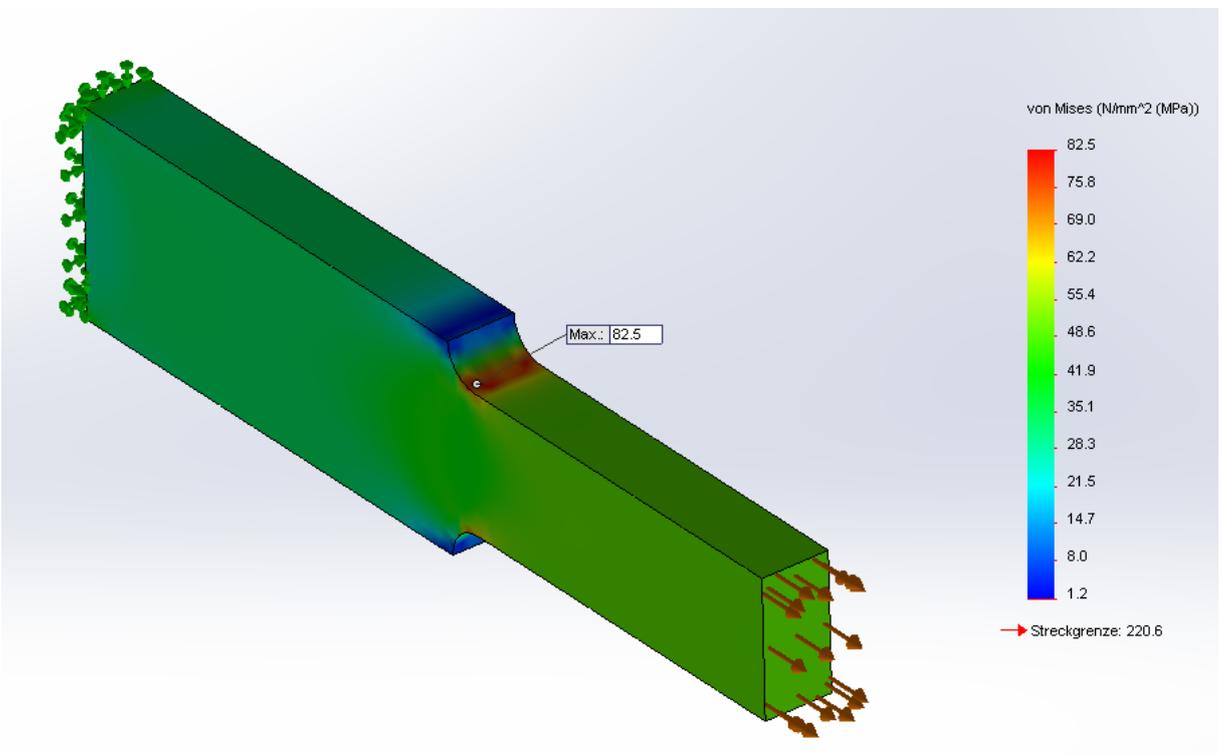


Abb. 95 Profilsprung 60-40 mit R10

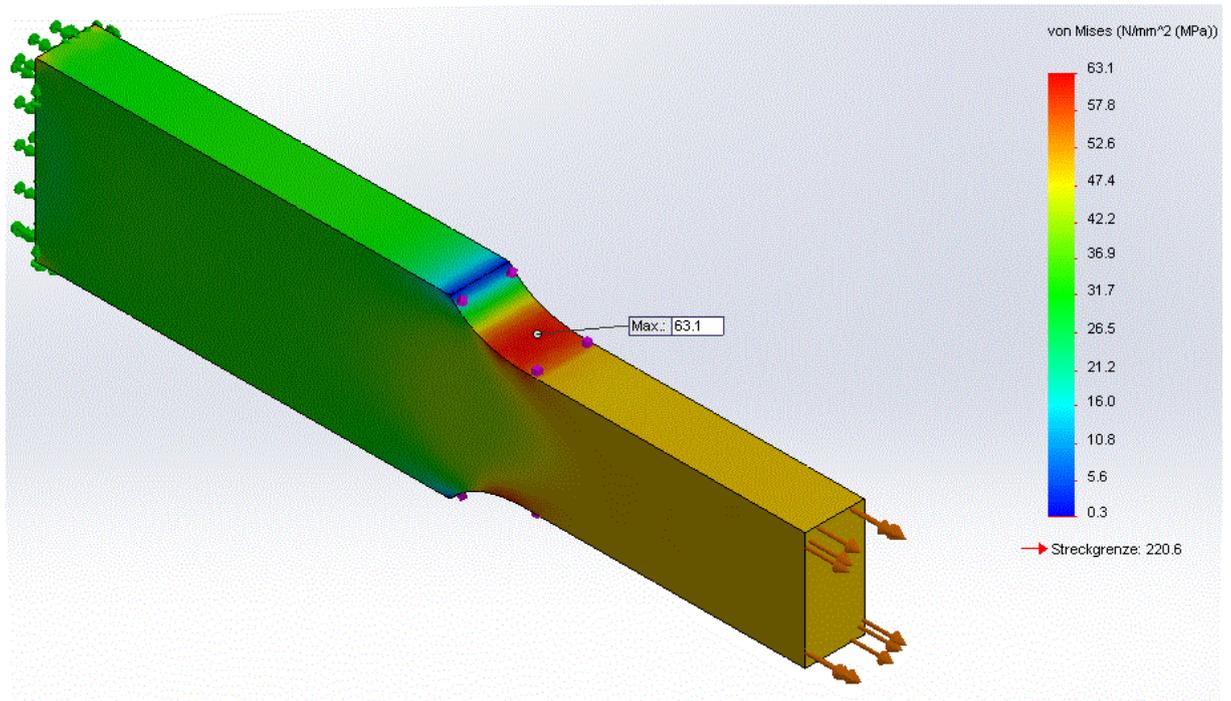


Abb. 96 Profilsprung 60-40 mit Übergangskontur als Zugdreieck

Zusammenstellung der Ergebnisse

	Handrechnung (Nmm ⁻²)	FEM (Nmm ⁻²)
	130,0	141,1
	110,0	122,4
	80,0	82,5
	Berechnungs- grundlage fehlt	63,1

Tabelle 5: Vergleich der Maximalspannungen bei Nennspannung $\sigma_n = 50,0 \text{ Nmm}^{-2}$

5.5 Abschließende Betrachtung

Die Tendenzen der Verringerung in der Spannungsspitze bei jeweils identischer Nennspannung zeigen sich sowohl bei der Handrechnung als auch bei der FEM-Analyse. Die Differenzen in den Betrachtungen zwischen den beiden Vorgehensweisen liegen im tolerierbaren Rahmen. Durch eine noch feinere Vernetzungssteuerung werden sich die Ergebnisse mutmaßlich weiter annähern. Auch ist die Ermittlung der Kerbformzahl mittels Tabelle Schwankungen in der Genauigkeit unterworfen und auch die Handrechnung geht stets von Idealisierungen aus.

Grundsätzlich können bezüglich der konstruktiven Formgestaltung folgende Empfehlungen allgemeingültig abgeleitet werden:

- Starke Absatzsprünge möglichst vermeiden; ggf. mehrere Absätze mit jeweils geringeren Übergängen gestalten
- Scharfe Übergänge vermeiden, insbesondere scharfe Kanten ($R > 0$) bilden extreme Spannungsspitzen
- Sanfte Übergänge schaffen beispielsweise über einen Korbbogen (vgl. Roloff/Matek Kap. 11.2.1-1.) oder nach der Methode der Zugdreiecke (vgl. nachfolgende Ausführungen)
- Wenn sanfte Übergänge konstruktiv nicht realisierbar sind, beispielsweise wegen der Realisierung einer Wellenschulter als Anlagefläche, dann Übergang mit Freistich DIN 509 schaffen (dient auch als Entlastungskerbe, vgl. auch Roloff/Matek Kap. 3.5.1-1.).

Die Methode der Zugdreiecke leitet sich aus Betrachtungen der Natur in der Disziplin Bionik ab und schafft eine Analogie zu mechanischen Problemlösungen der Technik. Die Methode lässt sich beispielsweise aus Betrachtungen des Baumwachstums rückschließen. Ein vom Stamm abgehender Ast muss an der Anbindung eine entsprechende Formgebung haben, um bei Wind- und Gewichtsbelastungen nicht sofort auf Grund einer dort herrschenden Spannungsspitze zu versagen und abzureißen. Gleiches gilt für den Übergang des Baumes ins Erdreich (vgl. Abb. 97).



Abb. 97 Kerbform nach dem Vorbild der Natur
Quelle: Mattheck; vgl. Anhang

Da durch die Evolution auf der Grundlage des Prinzips des Energieminimums nur optimierte Geometrien durchsetzungsfähig sind und waren, können mechanische Problemlösungen der Natur in den Grenzen der Technik transferiert werden. Die Methode der Zugdreiecke lässt sich geometrisch mit geringem Aufwand anwenden (vgl. Abb. 98). Mit dieser Methode lassen sich umgekehrt auch Bereiche identifizieren, die kaum/keinen Beitrag am Tragen der Nennspannung haben („Faulpelzecken“). Diese können ohne Einschränkungen für die Festigkeit eliminiert werden. Solche Erkenntnisse sind beispielsweise im Leichtbau von enormer Bedeutung.

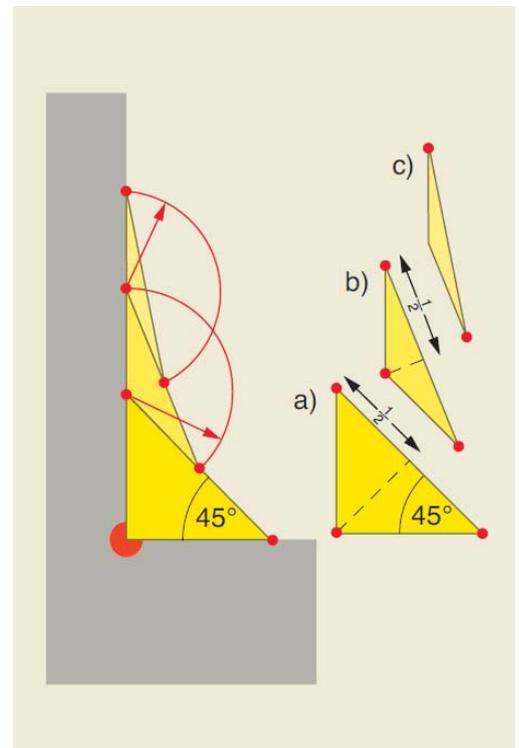


Abb. 98 Konstruktionsmethode Zugdreiecke
Quelle: Mattheck; vgl. Anhang

6 Angeformte Bauweise

In diesem Kapitel wird ein Biegeträger aus S235JR durch die so genannte angeformte Bauweise optimiert, durch die das Leichtbauprinzip „konstante Spannung“ realisiert wird. Hintergrund der Überlegungen ist hierbei, dass bei einem auskragenden Träger bei gleichbleibendem Querschnitt die Biegespannung von der Stelle der Kraftbeaufschlagung bis zur Einspannstelle hin kontinuierlich zunimmt (vgl. Abb. 99).

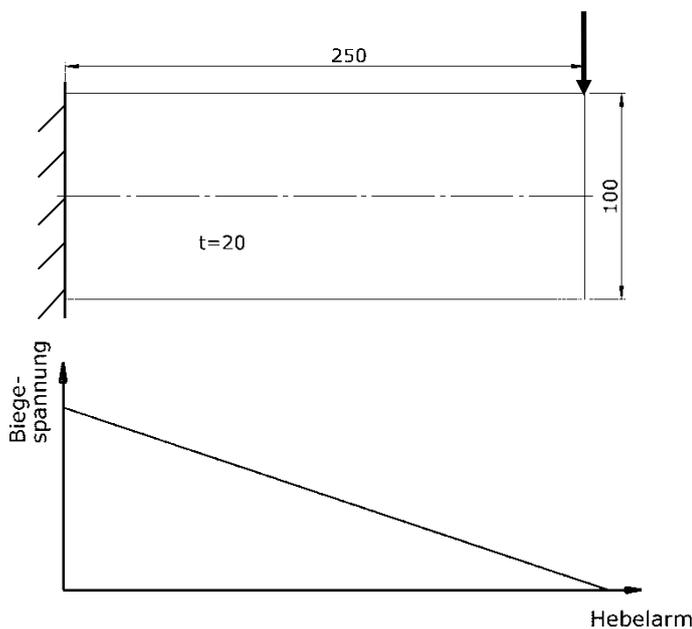


Abb. 99 Stützplatte Ausgangsbetrachtung mit Biegemomentverlauf

Die zulässige Spannung wird zunächst nach R/M Bild 3-31 ermittelt:

$$\begin{aligned} \sigma_{bF} &= 1,2 \cdot R_{p0,2N} \cdot K_t & R_{p0,2N} \text{ S235JR} &= 235 \text{ Nmm}^{-2}; \text{ (TB1 - 1)} \\ &= 1,2 \cdot 235 \text{ Nmm}^{-2} \cdot 1,0 & K_t &= 1,0; \text{ (TB 3 - 11a; } b \leq 100 \text{ mm)} \\ &= \underline{\underline{282 \text{ Nmm}^{-2}}} \end{aligned}$$

Allgemein ergibt sich der statische Sicherheitsnachweis rein auf Biegespannung mit:

$$S_F = \frac{\sigma_{bF}}{\sigma_{b\max}} \geq S_{F\text{erf}}$$

6.1 Vorhandene Spannung in der Ausgangsbetrachtung

Da der Schubanteil im Vergleich zur auftretenden Biegespannung vergleichsweise klein ist, beschränken sich alle nachfolgenden Handrechnungen auf die Biegung. Die FEM berücksichtigt demgegenüber in der Von-Mises-Spannung grundsätzlich alle auftretenden Spannungen.

$$\begin{aligned}\sigma_b &= \frac{M_b}{W_x} = \frac{F \cdot l}{\frac{b \cdot h^2}{6}} \\ &= \frac{10.000\text{N} \cdot 250\text{mm}}{\frac{20\text{mm} \cdot (100\text{mm})^2}{6}} = \underline{\underline{75,0\text{ Nmm}^{-2}}}\end{aligned}$$

Dies wird mittels FEM überprüft. An der Oberseite des Bauteils ist eine Trennfläche definiert worden, die den Bereich der Krafteinbringung örtlich begrenzt (Abb. 100), um die Kraftbeaufschlagung praxisgerechter abzubilden. Für die Analyse verwenden Sie folgende Vorgaben: $F = 10.000\text{ N}$, Material: S235JR (unlegierter Baustahl), Vernetzung gemäß Voreinstellung.

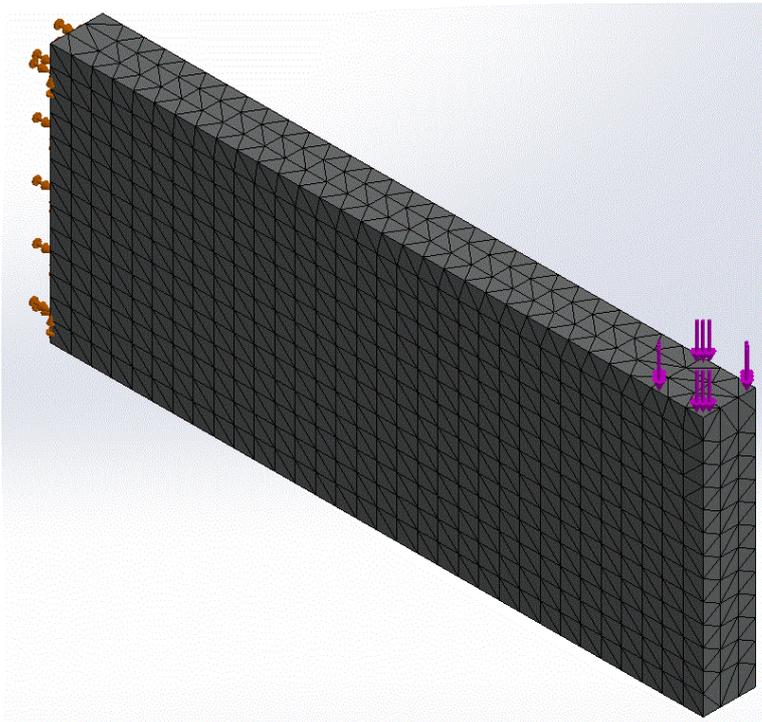


Abb. 100 Stützplatte Ausgangsbetrachtung mit Vernetzung und örtlicher Kraftbeaufschlagung



Abb. 101 Stützplatte Ausgangsbetrachtung in der FEM

Die Ergebnisse der FEM lassen sich sehr gut in Deckung bringen mit der Handrechnung. Nahe am Rand wird die vorhandene Von-Mises-Spannung mit $74,1 \text{ Nmm}^{-2}$ ermittelt und liegt damit nahe am errechneten Ergebnis von $75,0 \text{ Nmm}^{-2}$. Das dargestellte Spannungsmaximum von $89,2 \text{ Nmm}^{-2}$ liegt an der Körperkante und darf als Spannungssingularität unberücksichtigt bleiben.

In der Darstellung zeigt sich sehr deutlich der mittlere Bereich mit geringer Spannungsbeaufschlagung (blau), während sie zu den Randfasern hin zunimmt. Gleichzeitig nimmt die Spannung insgesamt vom rechten Rand der Kraftbeaufschlagung mit zunehmendem Hebelarm zur Einspannstelle hin kontinuierlich zu.

Im Sinne des Leichtbaus wird jetzt Material in den Bereichen entfernt, in denen die Spannung aktuell weit niedriger als die maximale ist („Faulpelzecken“). Aus der Darstellung des Verlaufs der Spannung (Abb. 101) können hierfür zwei Bereiche identifiziert werden:

- Von der Einspannstelle weg kann der Querschnitt wegen des kleiner werdenden Hebelarms kontinuierlich abnehmen
- Im Bereich der neutralen Faser kann Material entnommen werden

6.2 Geometrieanpassung an den Biegespannungsverlauf

Die Höhe des Biegeträgers kann in Analogie zum Verlauf der Biegespannung in Richtung Kraftbeaufschlagung kontinuierlich abnehmen. Da die Lasteinwirkung im oberen Bereich verbleiben soll, wird nur im unteren Bereich Material entfernt. Im Sinne der UVV wird statt des möglichen spitzen Auslaufs am Trägerende (Hebelarm = 0 → Biegespannung = 0) eine Absatzhöhe belassen.

Aus der Technischen Mechanik ergibt sich aus Analogiebetrachtungen der Berechnungsgleichung für das axiale Widerstandsmoment von Rechteckquerschnitten folgender Formelzusammenhang für die Ermittlung der Bauteilhöhe über die Auskraglänge:

$$h_x = h_{\max} \cdot \sqrt{\frac{l_x}{l}}$$

So ergeben sich für die entsprechenden Hebelarme folgende Höhenmaße:

$$h_{50} = 100 \text{ mm} \cdot \sqrt{\frac{50 \text{ mm}}{250 \text{ mm}}} = \underline{\underline{44,7 \text{ mm}}}$$

$$h_{100} = 63,2 \text{ mm}; h_{150} = 77,5 \text{ mm}; h_{200} = 89,4 \text{ mm}; h_{250} = 100 \text{ mm}$$

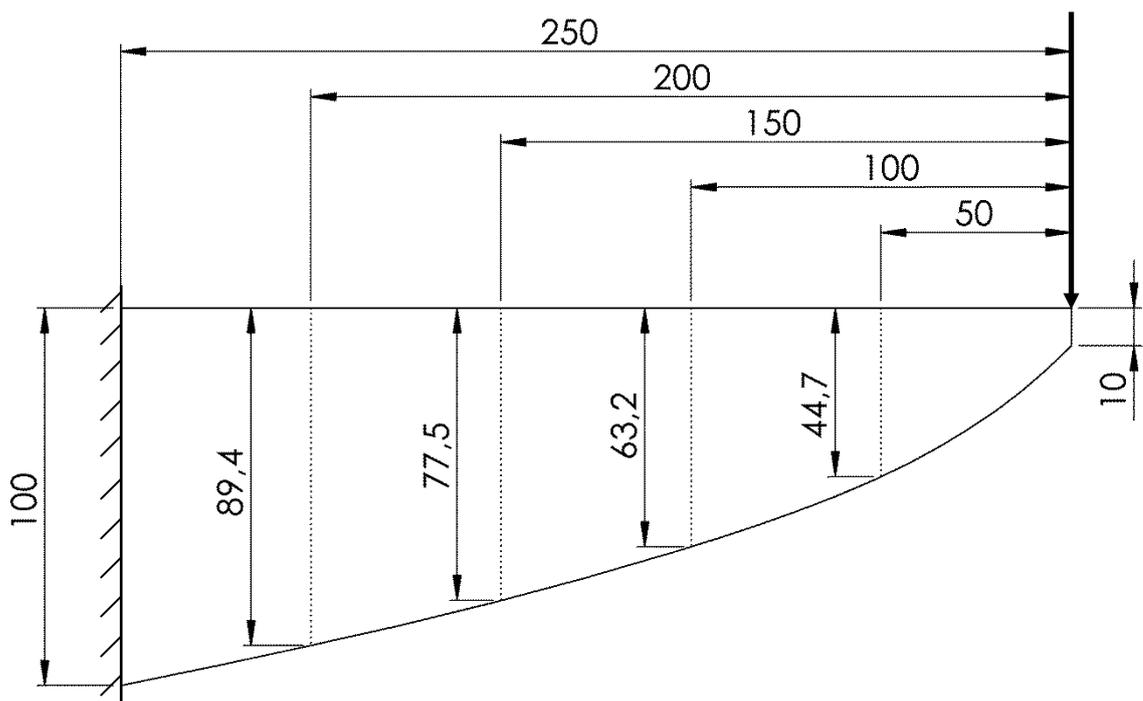


Abb. 102 Stützplatte-angeformt

Führen Sie die Analyse mit den Ausgangswerten aus der Vorgabe durch:

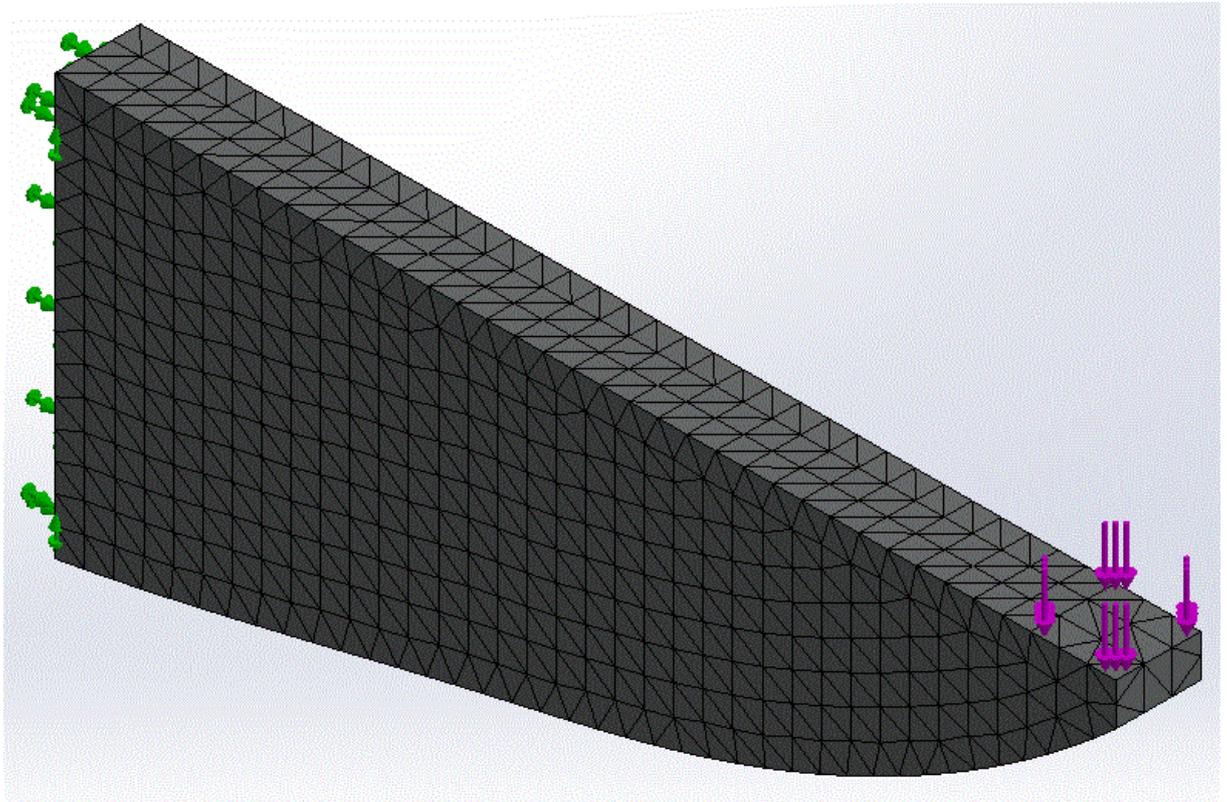


Abb. 103 Stützplatte-angeformt mit Vernetzung

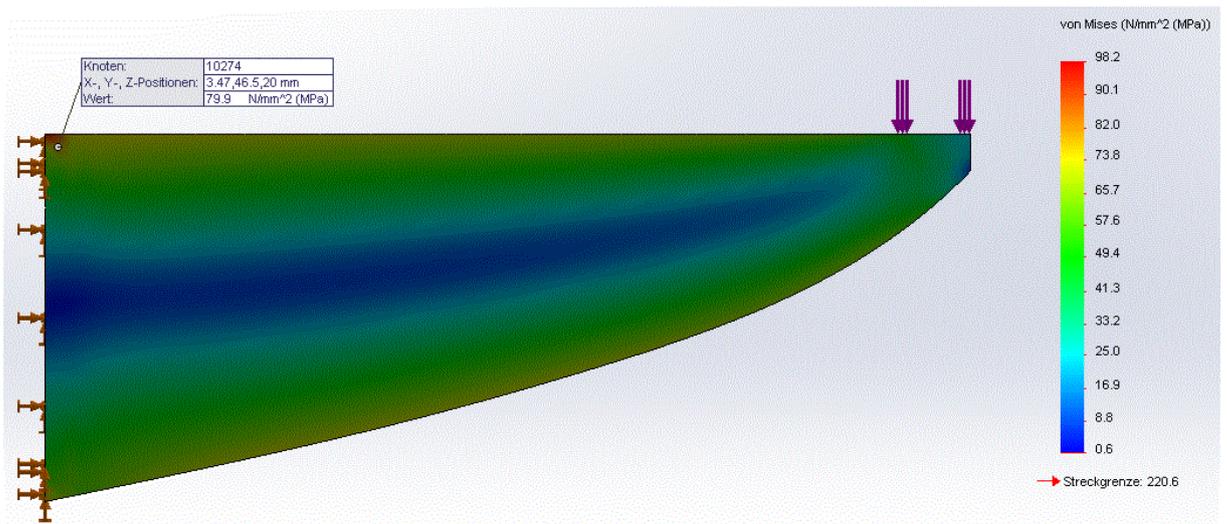


Abb. 104 Stützplatte-angeformt in der FEM

Die maximale Spannung wird am nahezu gleichen Knotenpunkt wie in der FEM zur Ausgangsbetrachtung (Abb. 101) sondiert und ist mit $79,9 \text{ Nmm}^{-2}$ nur ca. 8% höher. Über **EXTRAS | EIGENSCHAFTEN MASSE** kann u.a. das Volumen ausgelesen werden. Die Analyse des Volumens, welches über die Dichte unmittelbar zum Gewicht führt, zeigt eine Verringerung von ca. 33%. Bei nur geringer Erhöhung der maximalen Spannung konnte so über 1/3 an Gewicht eingespart werden.

Von der Formgebung her sind andere Profile für den Einsatz unter Biegespannung grundsätzlich weitaus günstiger. Hinweise hierzu finden sich in der Abbildung 82. Nachstehend sehen Sie die praktische Umsetzung des Gestaltungsprinzips der angeformten Bauweise am Beispiel einer Handauflage und der Stützung einer Behelfsbrücke (Abb. 105).



Abb. 105 Beispiele angeformter Bauweise

Handauflage am Sitz eines Busses (links)
Biegeträger einer Behelfsbrücke (unten links)
Bremspedal (unten)

Quellen unten: Hoenow; vgl. Anhang



Der Biegeträger **B** ist sehr gut dem Biegemomentenverlauf angepasst.



Weiteres Potenzial zur Gewichtsreduzierung ergibt sich im Bereich der neutralen Faser (Abb. 104). Da die blauen Bereiche in Werkstückmitte ohnehin nur einen geringen Beitrag leisten, können hier zusätzliche Volumenanteile entnommen werden.

Aus der Gleichung des axialen Widerstandsmomentes kann für die einzelnen Hebelarme der gesuchte Bohrungsdurchmesser auf der neutralen Faser ermittelt werden. Zunächst wird hierzu eine allgemeine Formel für das axiale Widerstandsmoment für die betrachtete Fläche hergeleitet (vgl. Abb. 107).

Aus der allgemeinen Grundformel für das Flächenmoment 2. Grades einer Rechteckfläche ergibt sich durch Subtraktion:

$$I_{x_{\text{gesamt}}} = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{B \cdot h^3}{12}$$

$$= \frac{B \cdot H^3 - B \cdot h^3}{12} = \frac{B}{12} \cdot (H^3 - h^3)$$

Durch die allgemeine Beziehung

$$W_{x_{\text{gesamt}}} = \frac{I_{x_{\text{gesamt}}}}{e_y} = \frac{I_{x_{\text{gesamt}}}}{H/2}$$

ergibt sich

$$W_{x_{\text{gesamt}}} = \frac{\frac{B}{12} \cdot (H^3 - h^3)}{\frac{H}{2}}$$

$$= \frac{B \cdot (H^3 - h^3) \cdot 2}{12 \cdot H} = \frac{B \cdot (H^3 - h^3)}{6 \cdot H}$$

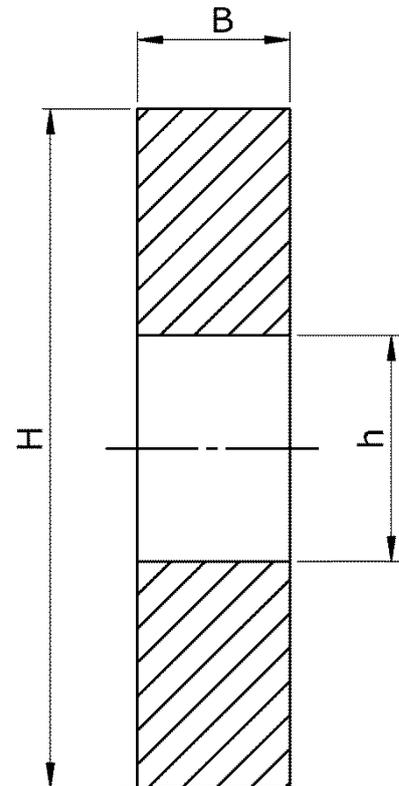


Abb. 107 Querschnitt

Mit den zuvor ermittelten Werten für die axialen Widerstandsmomente kann durch Umstellen der Gleichung das Maß h und damit der Bohrungsdurchmesser errechnet werden:

$$W_{x_{\text{gesamt}}} = \frac{B \cdot (H^3 - h^3)}{6 \cdot H}$$

$$\rightarrow \frac{W_{x_{\text{gesamt}}} \cdot 6 \cdot H}{B} = H^3 - h^3$$

$$\rightarrow h^3 = H^3 - \frac{W_{x_{\text{gesamt}}} \cdot 6 \cdot H}{B}$$

$$\rightarrow h = \sqrt[3]{H^3 - \frac{W_{x_{\text{gesamt}}} \cdot 6 \cdot H}{B}}$$

Für die Hebelarme gilt somit entsprechend Abbildung 102:

$$d_{50} = h_{50} = \sqrt[3]{H_{50}^3 - \frac{W_{x_{50}} \cdot 6 \cdot H_{50}}{B}}$$

$$= \sqrt[3]{(44,7 \text{ mm})^3 - \frac{5,89 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \cdot 6 \cdot 44,7 \text{ mm}^3}{20 \text{ mm}}} = 21,8 \text{ mm}$$

$$d_{100} = 30,6 \text{ mm}; d_{150} = 38,3 \text{ mm}; d_{200} = 43,8 \text{ mm}$$

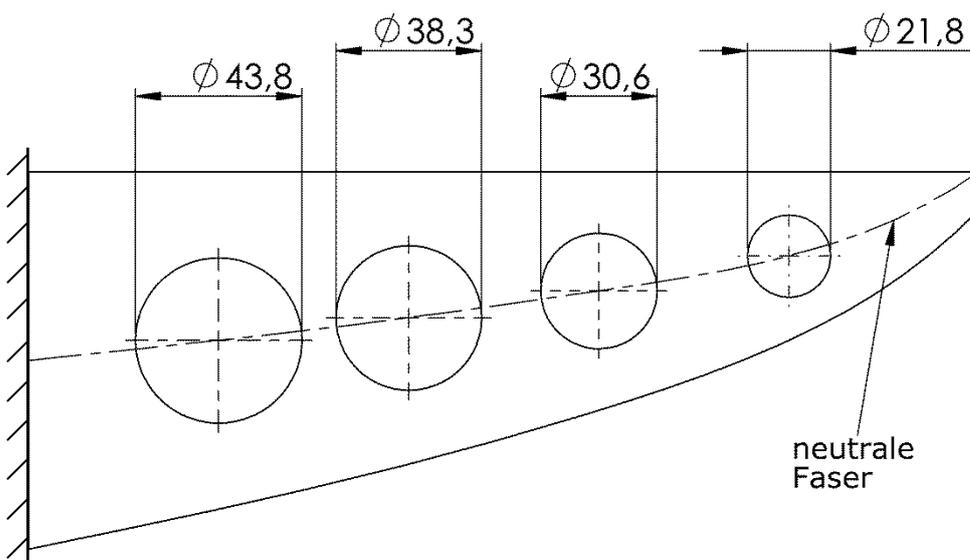


Abb. 108 Stützplatte-optimierte Geometrie

Führen Sie die Analyse mit den Ausgangswerten aus der Vorgabe durch. Für die Bohrungen arbeiten Sie mit einer Vernetzungssteuerung von 1mm.

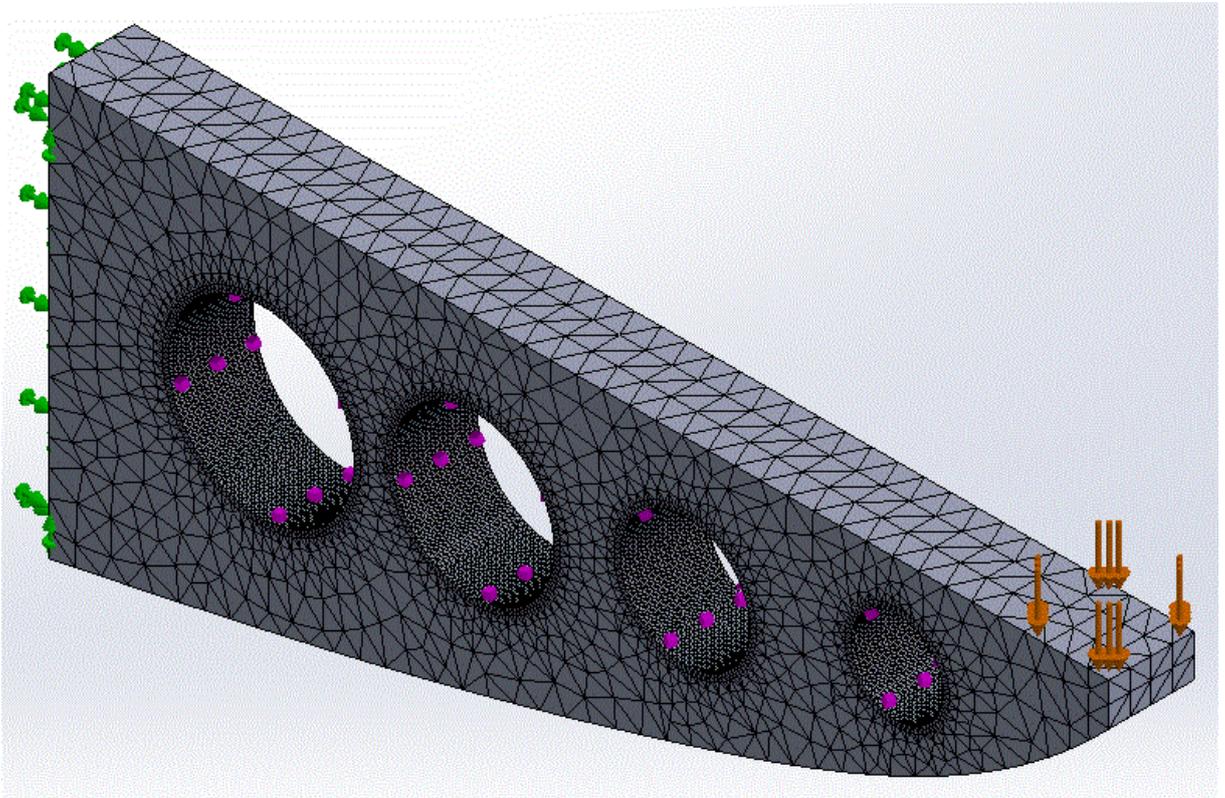


Abb. 109 Stützplatte-Optimierung mit Vernetzung

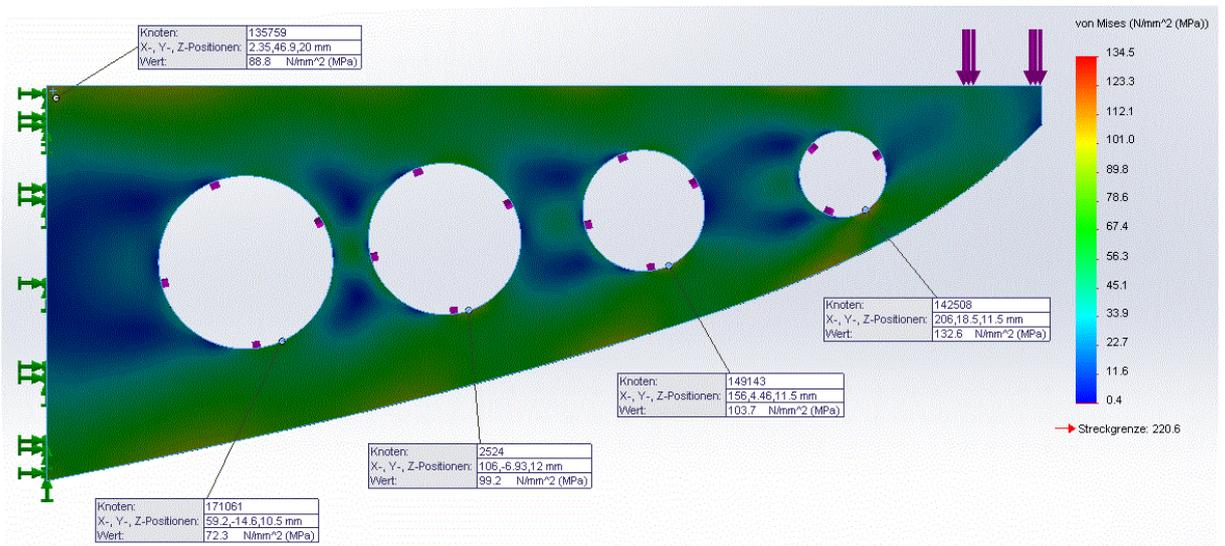


Abb. 110 Stützplatte-Optimierung in der FEM

Am Referenzknotenpunkt an der Einspannstelle ist die Spannung auf $88,8 \text{ Nmm}^{-2}$ angestiegen. In den Gleichungen zur Geometriebestimmung wurde von einer zulässigen Spannung von 85 Nmm^{-2} ausgegangen. Der Anstieg erklärt sich als Folge der durch die Bohrungen bedingten Kerbwirkung infolge eines veränderten Kraftflusses.

Im Bereich der Bohrungen selber zeigt sich von der linken Bohrung mit einer vorhandenen Spannung von $72,3 \text{ Nmm}^{-2}$ hin zur rechten ein Anstieg bis auf $132,6 \text{ Nmm}^{-2}$ und liegt somit zumindest für die äußerste Bohrung weit über den anderen lokalen Spannungsspitzen. Ursache ist hier die unmittelbare Kerbwirkung der Bohrung. Als einfachste Maßnahme zur Reduzierung der Spannung bietet sich eine Verkleinerung der Bohrung an. Aber auch ein Verschieben der vorliegenden Bohrung auf der neutralen Faser in Richtung der kleineren umgebenden Spannungen (blau gekennzeichnet) ist sinnvoll und wird nachfolgend umgesetzt.

Bei verbleibenden Durchmessern werden die beiden äußeren Bohrungen in Richtung Einspannstelle versetzt und bei ansonsten gleichen Rahmenbedingungen die FE-Analyse durchgeführt. Die Vernetzungssteuerung wird jedoch nur an der vorderen kritischen Bohrung angewendet.

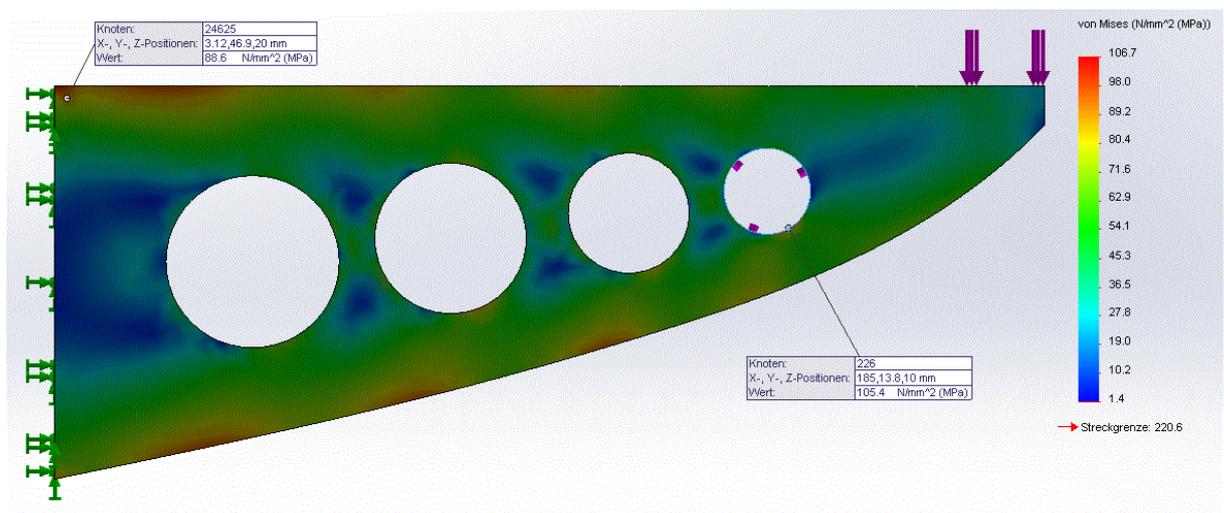


Abb. 111 Stützplatte-Optimierung mit Bohrungsverschiebung in der FEM

Die Spannungsspitze in der äußeren Bohrung wurde einzig durch die Verschiebung von $132,6 \text{ Nmm}^{-2}$ auf $105,4 \text{ Nmm}^{-2}$ gesenkt. Die Spannung am Referenzknoten in Nähe der Einspannstelle ist mit $88,6 \text{ Nmm}^{-2}$ gegenüber $88,8 \text{ Nmm}^{-2}$ sogar leicht gesunken. Das Volumen und damit das Bauteilgewicht haben sich in der dritten und vierten Analyse im Vergleich zum Ausgangsprofil um insgesamt 48% verringert. Nachstehend sind die Ergebnisse noch mal in einer Übersicht zusammengefasst:

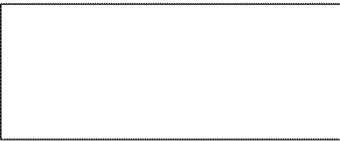
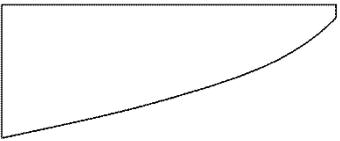
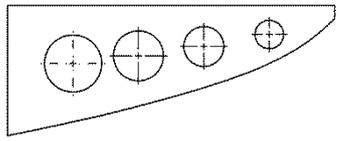
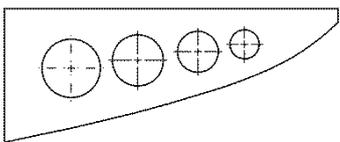
	Spannungsspitze (Spannung in Bohrung)	Veränderung im Volumen/Gewicht
	Ausgangslage: $74,1 \text{ Nmm}^{-2}$	Ausgangslage
	$79,9 \text{ Nmm}^{-2}$ (+8%)	-33%
	$88,8 \text{ Nmm}^{-2}$ (+20%) ($132,6 \text{ Nmm}^{-2}$)	-48%
	$88,6 \text{ Nmm}^{-2}$ (+20%) ($105,4 \text{ Nmm}^{-2}$)	-48%

Tabelle 6: Verlauf der Optimierung



Abb. 112 Seilbahnaufhängung (Bundesgartenschau Koblenz), Vordachkonstruktion, Stadiondach

6.4 Weitere Ansätze zur Optimierung

Insgesamt liegt das ermittelte Spannungsmaximum noch weit unter dem zulässigen. Mit der Ausgangsgleichung aus der Einführung in Kapitel 6 ergibt sich als Sicherheit gegen Fließen:

$$S_F = \frac{\sigma_{bF}}{\sigma_{b\max}} \geq S_{F\text{erf}}$$

$$= \frac{282,0\text{Nmm}^{-2}}{105,4\text{Nmm}^{-2}} \approx 2,7 > S_{F\text{erf}} (= 1,5)$$

Als einfachste Maßnahme kann die Bauteilbreite verringert werden. Eine Reduktion im Höhenmaß ist wegen der überproportionalen Beteiligung der äußeren Fasern an der Biegespannung hingegen kontraproduktiv. Grundsätzlich ist das Rechteckprofil ohnehin nur bedingt sinnvoll zur Aufnahme von Biegespannungen. Profile wie der Doppel-T-Träger sind hier zu bevorzugen. Eine gute Orientierung bieten die Abbildungen 82 und 83.

In Abbildung 111 zeigen sich noch weitreichende blaue Bereiche mit hinreichend Einsparpotenzial. Da der Handrechnung im Besonderen unter dem Aspekt der gegenseitigen Spannungsbeeinflussung durch Kerben enge Grenzen gesetzt sind, können weitere Versuche zur Materialentnahme mittels FEM in ihrer Wirkung untersucht werden.

In dieser Denkrichtung sind erste EDV-gestützte Systeme im Einsatz. Diese Systeme orientieren sich am „Vorbild“ der Natur, die in der Evolution nur Bauteilstrukturen nach dem Prinzip des minimalen Energie- und Ressourcenverbrauchs hat überleben lassen. So sind Baustrukturen von Knochen oder Bäumen als Idealbilder optimierten Kraftflusses bei Umsetzung des Prinzips der homogenen Spannungsverteilung und optimierter Kerbformen anzusehen. Bedeutende Ansätze und Entwicklungen in diese Richtung sind Werkzeuge zur Gestaltoptimierung (CAO) und zur Topologieoptimierung (SKO).

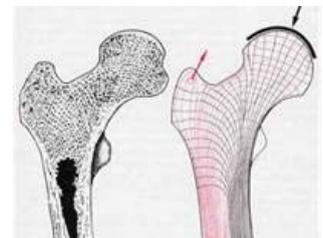


Abb. 113 Oberschenkelknochen
Quelle: Internet; vgl. Anhang

Das Prinzip der Gestaltoptimierung CAO (Computer Aided Optimization) wurde bereits im Kapitel 5.4 aufgegriffen im Zusammenhang mit der Optimierung der Kerbwirkung am Querschnittsübergang eines Flachstahls. Das Vorbild für das CAO-Verfahren bildet das Wachstumsverhalten von biologischen Kraftträgern wie Knochen oder Baumstämmen. Wie in der Natur werden stark beanspruchte Stellen verstärkt und weniger beanspruchte Bereiche bilden sich zurück (vgl. Abb. 114).

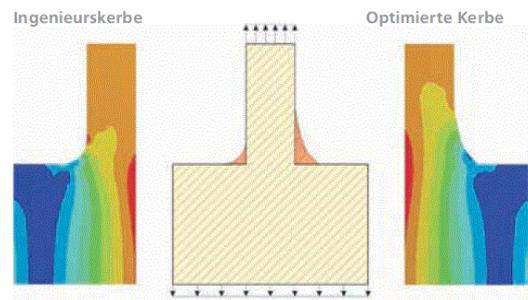


Abb. 114 Gestaltoptimierung (CAO)
Quelle: Internet; vgl. Anhang

Die Methode Topologieoptimierung SKO (Soft Kill Option) hat eine Homogenisierung der Spannungsverteilung bei gleichzeitiger Volumenreduzierung zum Ziel (vgl. Abb. 115). Hier werden Bereiche mit geringem Potenzial an der Gesamtspannung identifiziert („Faulpelzcken“) und in Iterationsschleifen reduziert (Abb 116). Übrig bleibt eine tragende Struktur mit geringstmöglichem Volumenmaß bei homogener Spannungsverteilung ähnlich Baustrukturen der Natur.

Optimierung SKO-Methode

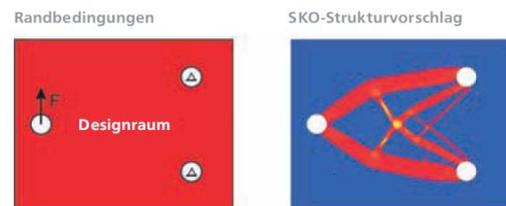


Abb. 115 Topologieoptimierung (SKO)
Quelle: Internet; vgl. Anhang

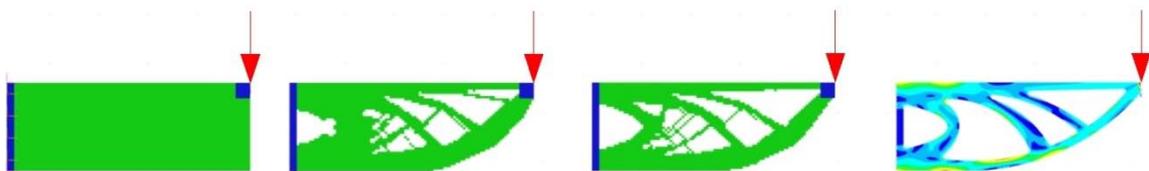


Abb. 116 Iterationsschleifen zur Formoptimierung (Quelle: Internet; vgl. Anhang)

Besondere Bedeutung haben Konzepte des Leichtbaus im Fahrzeugbau sowie in der Luftfahrt. Zum einen sind Verbrauchsdaten in unmittelbarem Zusammenhang mit Fahrzeuggewicht gekoppelt. Andererseits kommt dem Aspekt der Emission (CO₂-Ausstoß etc.) eine zunehmende Umweltbedeutung zu. Beispielhafte Umsetzungen der benannten Methoden finden sich auf der nächsten Seite.

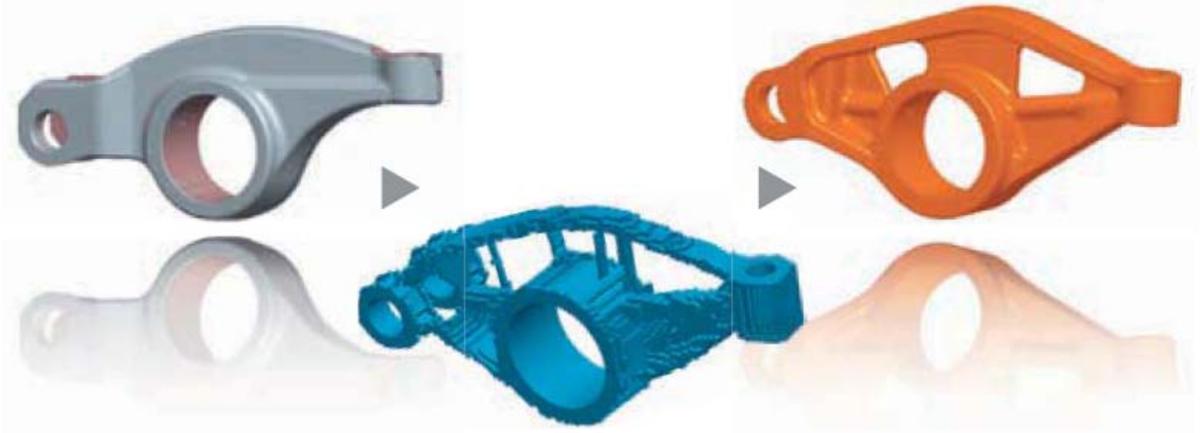
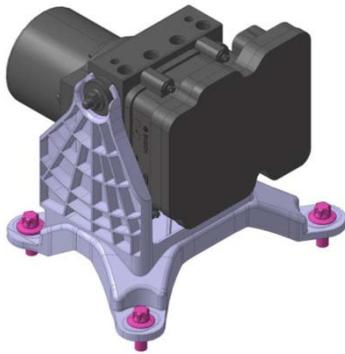
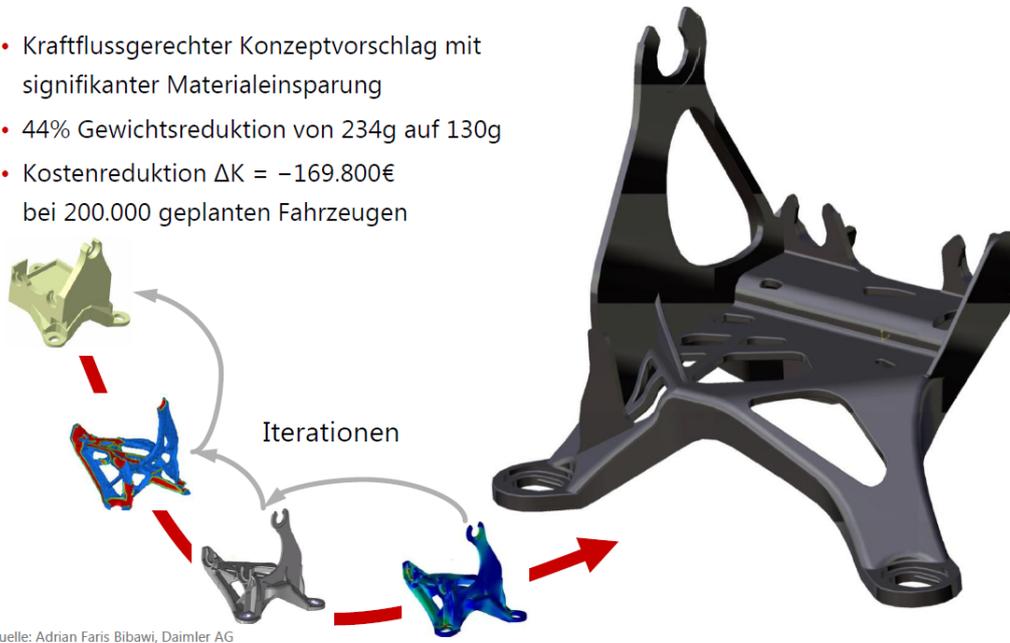


Abb. 117 Optimierter Kiphebel mit Gewichtsreduktion von 35%
Quelle: Internet; vgl. Anhang



ESP-Halter der Baureihe R231

- Kraftflussgerechter Konzeptvorschlag mit signifikanter Materialeinsparung
- 44% Gewichtsreduktion von 234g auf 130g
- Kostenreduktion $\Delta K = -169.800\text{€}$ bei 200.000 geplanten Fahrzeugen



Quelle: Adrian Faris Bibawi, Daimler AG

Abb. 118 Optimierter ESP-Halter
Quelle: Internet; vgl. Anhang

Entscheidend für die Umsetzung derartiger Bauteile ist die fertigungstechnische Umsetzbarkeit. Hier stellt sich der 3D-Druck als zukunftsweisene Technologie dar. In Abbildung 119 ist ein nach bionischen Methoden entwickeltes Strukturbauteil für den Airbus A350 dargestellt, das in großer Stückzahl verbaut wird. Bislang wurde das Bauteil aus Aluminium gefräst. Jetzt ist es mit der Methode Rapid Prototyping aus Titan durch Laserschmelzen gedruckt worden.

Die Gewichtsersparnis beträgt 30%. Neben der Gewichtsersparnis und der Geometriefreiheit in der Bauteilgestaltung ergeben sich weitere wirtschaftliche Vorteile: Werkzeuge wie bei Gussformen können entfallen und die Zeit bis zur Bauteilverfügbarkeit verkürzt sich um bis zu 75%, da direkt auf der Grundlage des elektronischen Modells gedruckt wird. Durch die werkzeuglose Herstellung können zudem zu einem frühen Zeitpunkt Funktionsmuster mit seriennahem Bauteilcharakter gefertigt werden. Entsprechend werden zu einem früheren Zeitpunkt Fehlerquellen identifiziert und eliminiert. So reduziert sich nach Schätzungen bei Airbus die Bauteilentwicklung von sechs Monaten auf einen Monat.



Abb. 119 Kabinenhalter (Bracket) für Airbus A350
Quelle: Fachzeitschrift Konstruktionspraxis; vgl. Anhang

Zudem ist das Laserschmelzen ressourcenschonend. Während beim Fräsen von Flugzeugteilen bis zu 95% recyclingfähiger Abfall entsteht, beträgt dies beim Laserschmelzen gerade mal ca. 5%. Das Laserschmelzen gehört daher auch zur so genannten „Green Technology“. Bei hochwertigen Flugzeugwerkstoffen wie Titan ist auch dies ein gewichtiges wirtschaftliches Argument. Wegen des Wegfalls von Werkzeugkosten und Gussformen lohnt sich dieses Verfahren schon heute für die im Bereich der Luftfahrt vergleichsweise kleinen Losgrößen im Sinne der Herstellkosten. Nachhaltige Effekte werden auch in der Ersatzteilversorgung erzielt. Eine Lagerhaltung von vorproduzierten Teilen kann entfallen, weil Austauschteile dezentral „on demand“ zeitnah hergestellt (gedruckt) werden können. Lieferwege und damit –zeiten entfallen. Als Folge reduzieren sich die wartungsbedingten Stand- und Revisionszeiten von Flugzeugen oder anderer Maschinen.

Quellenverzeichnis

- Brand, Michael: Grundlagen FEM mit SolidWorks 2010; Vieweg+Teubner; 1. Auflage 2011
- Herbert Wittel u.a.: Roloff/Matek Maschinenelemente; Vieweg+Teubner; 21. Auflage 2013
- Böge, Alfred: Technische Mechanik; Vieweg+Teubner; 29. Auflage 2011
- Mattheck, Claus: Warum alles kaputt geht; Forschungszentrum Karlsruhe GmbH; 1. Auflage 2003
- Hoewnow, Gerhard u.a.: Entwerfen und Gestalten im Maschinenbau; Fachbuchverlag Leipzig; 1. Auflage 2004
- Fleischer, Bernhard / Theumert, Hans: Entwickeln, Konstruieren, Berechnen; Springer Vieweg; 4. Auflage 2015
- Fachzeitschrift Konstruktionspraxis 11/14; Vogel Business Media; S. 36 ff.
- Univ.-Prof. Dr.-Ing. Jörg Feldhusen: Folien Vorlesung Konstruktionslehre II – V8 Virtuelle Produktentwicklung; RWTH Aachen
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Finite-Elemente-Methode>
- <http://www.iw-maschinenbau.de/FEM-Analyse.26.0.html>
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Vergleichsspannung>
- <http://www.google.de/search?hl=de&biw=1259&bih=603&q=Torsion&tbs=dfn:1&tbo=u&sa=X&ei=47bJTbX3DtHzsgaQ49iSAw&ved=0CBwQkQ4>
- http://bionik.fbsm.hs-bremen.de/page/elarning_leichtbau/FO_erlearning_leichtbau5121_KerbspannungDauerfestigkeit.html
- <http://www.sachs-engineering.de/bionik>

Alle nicht gekennzeichneten Bilder, Grafiken und Screenshots sind vom Verfasser erstellt worden.